Логика и алгоритмы-2012. Дополнительные задачи

201. Постройте 3-элементное множество X, такое что $\bigcup X \subset X$.

202. Докажите равенство $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

203. Существуют ли такие множества A,B,C, что
$A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = (A \cap B) \setminus C = \varnothing$?

204. Докажите следующие равенства:

а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

б) $(E \times E) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times E) \cup (E \times (E \setminus B))$ (для $A, B \subset E$).

205. Даны непустые множества A, B, такие что $A \times B = B \times A$. Докажите, что A = B.

206. Докажите, что композиция функций сохраняет инъективность и сюръективность.

207. Постройте инъективное отображение множества X в себя, которое не является биекцией, для случаев:
а) $X = \mathbf{N}$, б) $X = \mathbf{R}_+$ (множество положительных действительных чисел),
в) $X = \{\langle x,y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

208. Даны конечные множества A и B из n и 2 элементов, соответственно.
Найдите количество сюръекций из A на B.

209. Какие из следующих отношений являются отношениями эквивалентности?
а) $\{\langle x,y \rangle \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \mid 10(x-y) \in \mathbf{Z}\}$,
б) $\{\langle\langle x,y \rangle, \langle z,t \rangle\rangle \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \times (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \mid x+t = y+z\}$,
в) отношение параллельности на множестве всех прямых в трехмерном пространстве,
г) $\{\langle x,y \rangle \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \mid$ x и y взаимно просты$\}$,
д) $\{\langle A,B \rangle \in (\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \times \mathcal{P}(\{1,2,3\})) \mid A \cap B = \varnothing$ или $A = B\}$,
е) $\{\langle x,y \rangle \in (\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \mid x^2 + y^2$ четно$\}$.

210. Пусть R - отношение на множестве A, которое симметрично, транзитивно, а также удовлетворяет условию $\forall x \in A\ \exists y \in A\ xRy$. Докажите, что R - отношение эквивалентности.

211. Даны множества A,B,C, такие что $A \sim B$, $A \cap B = \varnothing$, $|C| = 2$. Докажите, что $A \times C \sim A \cup B$.

212. Докажите, что если $A \sim B$, то $A^c \sim B^c$. Верно ли обратное утверждение?

213. Докажите, что множество всех отношений линейного порядка на конечном множестве X равномощно множеству всех биекций $X \to X$.

214. Постройте сюръективное отображение $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которое не является биекцией.

215. а) Докажите, что если $A \sim A'$, $B \sim B'$ и $A \cap B = A' \cap B' = \varnothing$, то $A \cup B \sim A' \cup B'$.
б) Что можно утверждать в случае, если $A \sim A'$, $B \sim B'$ и $A \cap B \neq \varnothing$?

216. Докажите, что если $A \sim A'$ и $B \sim B'$, то $A \times B \sim A' \times B'$.

217. Докажите, что множество $\{X \mid X \subset \mathbf{N} \wedge |X| = 2\}$ счетно.

218. Докажите, что множество всех интервалов в $\mathbf{Q}$ (множестве рациональных чисел) счетно.

219. Дано счетное множество A. Докажите, что в A существует счетная строго возрастающая последовательность подмножеств: $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \ldots \subsetneq A_n \subsetneq \ldots$, такая что все множества $A_{n+1} \setminus A_n$ бесконечны.

220. Докажите, что множество всех последовательностей рациональных чисел, стремящихся к 0, имеет мощность континуума.
221. Докажите, что множество всех отображений $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ имеет мощность континуума.
222. Докажите, что множество всех строго возрастающих последовательностей рациональных чисел имеет мощность континуума.
223. Докажите, что множество всех строго возрастающих последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.
224. Докажите, что образ счетного множества при любом отображении не более чем счетен.
225. Постройте диаграмму частично упорядоченного множества $(\mathscr{P}(\{0,1,2\}),\subset)$.
226. Докажите, что $(\mathscr{P}(X), \subset) \cong (\mathscr{P}(X), \supset)$.
227. Рассмотрим множества **N**, **Z**, **Q** со стандартным отношением порядка. Постройте вложение упорядоченного множества **N**+**Z** в **Q** (т.е. изоморфизм на частично упорядоченное подмножество).
228. Докажите, что линейно упорядоченные множества **Q+1** и **Q** не изоморфны.
229. Докажите, что линейно упорядоченные множества **Q+Z** и **Q** не изоморфны.
230. Докажите, что всякое счетное линейно упорядоченное множество можно вложить в **Q.**
231. Докажите, что всякое частично упорядоченное множество (X, R) можно вложить в $(\mathscr{P}(X), \subset)$.
232. Докажите, что если вполне упорядоченное множество бесконечно и имеет наибольший элемент, то оно имеет начальный отрезок, изоморфный ω.
233. Рассмотрим множество M всех многочленов от переменной x степени не выше 3 с натуральными коэффициентами со следующим отношением $\preccurlyeq$: $f \preccurlyeq g$, если для всех достаточно больших x, $f(x) \leq g(x)$. Докажите, что $(M, \preccurlyeq)$ - вполне упорядоченное множество.
234. Докажите, что существует континуум различных вполне упорядочений множества **N**.
235. Докажите, что всякое вполне упорядоченное множество имеет единственный автоморфизм (т.е. изоморфизм на себя).
236. Опишите все автоморфизмы для $(\mathbf{Z},<)$.
237. Существует ли вполне упорядоченное множество X, для которого $X+\omega \cong X$?
238. Докажите, что для всякого вполне упорядоченного множества X найдется вполне упорядоченное множество Y, не изоморфное никакому начальному отрезку X.