Механика и теория поля. Листок 3

1. Пусть $\vec{r}$ и $\vec{p}$ — радиус-вектор и импульс материальной точки, декартовы координаты которых удовлетворяют каноническим Пуассоновым соотношениям

$$\{r_i, r_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \qquad \{r_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Рассмотрим вектор момента импульса точки $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$ и векторную функцию на фазовом пространстве вида

$$\vec{f} = \vec{r}\phi_1 + \vec{p}\phi_2 + \vec{M}\phi_3,$$

где ϕ_a, $a = 1, 2, 3$ — произвольные скалярные функции. Найдите значение скобки Пуассона

$$\{\vec{a} \cdot \vec{M}, \vec{b} \cdot \vec{f}\},$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные постоянные векторы.

2. Гамильтониан намагниченного шара в однородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}}$ имеет вид

$$H = \frac{\vec{M} \cdot \vec{M}}{2I} - \gamma \vec{M} \cdot \vec{\mathcal{H}},$$

где $\vec{M}$ — вектор момента импульса шара, а константа взаимодействия γ носит название гиромагнитного отношения. Выведите уравнения движения для компонент момента импульса и найдите их явное решение для случая $\vec{\mathcal{H}} = (0, 0, \mathcal{H}_0)$.

3. Материальная точка массы m движется в центрально-симметричном потенциале

$$U(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad r = |\vec{r}|.$$

а) Докажите, что вектор

$$\vec{K} = \frac{1}{m}(\vec{p} \times \vec{M}) - \frac{\alpha\,\vec{r}}{r},$$

называемый вектором Рунге-Ленца, является интегралом движения. Здесь $\vec{M}$ и $\vec{p}$ есть, соответственно, вектор момента импульса и импульс материальной точки.

б)* Вычислите скобки Пуассона $\{K_i, K_j\}$ и $\{K_i, M_j\}$.

4. Материальная точка массы m движется вдоль прямой (одномерное движение) под действием потенциала

$$U(x) = -\frac{\alpha}{\mathrm{ch}^2(x)},$$

где $\alpha > 0$ — параметр взаимодействия, x — координата на прямой. В начальный момент материальная точка находится в начале координат $x = 0$ и имеет полную энергию E. Определите характер движения точки (финитное или инфинитное), найдите закон движения и период движения (для финитного случая) для трех случаев: $E < 0$, $E = 0$ и $E > 0$.

5. Рассмотрим Пуассонову структуру на вещественных функциях $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, заданную формулой

$$\{x_i, x_j\} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_k, \qquad (*)$$

где $\{x_i\}_{i \in 1,2,3}$ — координаты в $\mathbb{R}^3$, а ε_{ijk} — полностью антисимметрический тензор третьего ранга. Симплектическими листами данной Пуассоновой структуры являются концентрические сферы в пространстве $\mathbb{R}^3$.

а) Найдите невырожденную скобку Пуассона, порождаемую ограничением скобки $(*)$ на сферу радиуса r. Определите соответсвующую симплектическую 2-форму.

б) Рассмотрим стереографическую проекцию сферы из северного полюса на плоскость, касающуюся сферы в южном полюсе:

$$(\theta, \phi) \in S^2 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad e^{i\phi} \operatorname{ctg}(\theta/2) \mapsto x + iy.$$

Найдите симплектическую структуру на касательной плоскости, в которую переходит симплектическая структура на сфере, найденная в предыдущем пункте. Определите соответствующие скобки Пуассона.

в) Найдите уравнения движения на плоскости с Пуассоновой структурой, найденной в предыдущем пункте, которые отвечают Гамильтониану

$$H = \frac{x^2 + y^2}{2}.$$