Программа по курсу уравнений с частными производными
Лектор — д.ф.-м.н. Чепыжов Владимир Викторович

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных второго порядка: уравнение колебаний струны, уравнение теплопроводности, стационарное уравнение.

2. Квазилинейное уравнение с частными производными второго порядка. Главный часть уравнения, ее преобразования при линейных и нелинейных заменах. Характеристические поверхности.

3. Приведение линейного уравнения к каноническому виду в точке. Классификация линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Уравнения характеристик.

4. Постановка основных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Корректность постановки. Теорема Коши-Ковалевской.

5. Задача Коши для уравнения малых колебаний струны, формула Даламбера. Неоднородное уравнение струны. Гладкость решения в зависимости от гладкости начальных данных. Полуограниченная струна, условия согласования.

6. Ограниченная струна. Метод Фурье. Обоснование метода Фурье для уравнения колебаний закрепленной струны. Энергетическая оценка. Обобщенные решения уравнения струны.

7. Задача Штурма–Лиувилля. Ортогональность собственных функций оператора Штурма–Лиувилля; вещественность, неположительность и однократность собственных значений. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля.

8. Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача. Метод Фурье. Принцип максимума. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начальных и граничных условий.

9. Преобразование Фурье и его применние для построения решения уравнения теплопроводности. Формула Пуассона. Уравнения, корректные по Петровскому.

10. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Характеристический конус. Теорема единственности и непрерывной зависимости решений от начальных данных.

11. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Распространение колебаний в $\mathbb{R}^3$. Передний и задний фронт волны.

12. Метод спуска. Формула Пуассона решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Распространение волн в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$. Области зависимости решений от начальных данных.

13. Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа, его существование. Представление функции в виде суммы трех потенциалов.

14. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа, ее симметрия. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина.

15. Функция Грина шара. Вывод формулы Пуассона для решения задачи Дирихле в шаре в $\mathbb{R}^n$. Обоснование формулы Пуассона.

16. Гармонические функции, их свойства: бесконечная дифференцируемость, теорема о потоке, теоремы о среднем по сфере и по шару. Принцип максимума для гармонических функций. Лемма о нормальной производной.

17. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Неравенство Харнака. Теорема Лиувилля.

18. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле в ограниченной области, условие существования решения задачи Неймана.

19. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространство $H^1(\Omega)$, его полнота. Пространство $H_0^1(\Omega)$. Неравенство Фридрихса.

20. Постановка обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородными краевыми условиями. Доказательство существования и единственности решения этой задачи сведением к теореме Рисса.