

Программа курса геометрии

Темы, помеченные (*), являются факультативными и не входят в программу экзамена.

1. ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Содержание. Теорема Шаля классификации движений плоскости и пространства.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ УГЛЫ.

Содержание. Классификация преобразований подобия плоскости. Инверсия на плоскости и в пространстве. Пополненная (круговая) плоскость как стереографическая проекция сферы. Ортогональные окружности и пучки окружностей. Параллелизм Штейнера. Комплексные числа. Линейные и дробно-линейные преобразования комплексной прямой.

3. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ. ВЕКТОРЫ

Содержание. Аффинные преобразования плоскости и их действия на векторы. 3-транзитивность группы аффинных преобразований плоскости. Ориентированная площадь. Теоремы Чевы и Менелая. Центр масс. Бариецентрические координаты.

4. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Содержание. Проективная прямая и плоскость. 3-транзитивность группы проективных преобразований прямой. Двойное отношение. 4-транзитивность группы проективных преобразований плоскости. Теоремы Паппа и Дезарга.

5. КОНИКИ

Содержание. Классы метрической, аффинной и проективной эквивалентности плоских коник. Рациональная параметризация плоской коники. Проективная двойственность. Полярное преобразование. Теоремы Паскаля и Бриансона.

6. ЛИНЕЙНЫЕ, АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Содержание. Векторные пространства, базисы. Линейные операторы. Ориентированный объем, правило Крамера.

7. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Содержание. Расстояние между скрещивающимися прямыми (вообще, между двумя подпространствами). Площади треугольников в пространстве. Ортогональное проектирование. Проективная двойственность.

8. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Содержание. Закон инерции. Квадрики в евклидовом пространстве и их главные оси. Квадрики в пространстве и их прямолинейные образующие. Рациональная параметризация квадрики и решение диофантовых уравнений.

9. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ (*)

Содержание. Теоремы Радона и Хелли. Пример 4-мерного многогранника с произвольным числом вершин, в котором каждые 2 вершины соединены ребром. Тождества Эйлера и Дена–Соммервиля.

10. КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Содержание. Группы симметрий геометрических фигур. Абстрактные группы. Действие группы на множестве. Симметрическая группа. Изоморфизмы классических групп малых порядков. Формула Бернсайда.

11. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ (*)

Содержание. Трехмерные правильные многогранники. Конечные подгруппы в SO_3 . Кватернионы и $SO_3 = \mathbb{RP}^3$. 4-мерные правильные многогранники.

12. РЕШЕТКИ (*)

Содержание. Формула Пика на плоскости и ее отсутствие в пространстве. Цепные дроби. Группы отражений. Калейдоскопы.

13. ПЛОСКОСТЬ ЛОБАЧЕВСКОГО

Содержание. Модели Пуанкаре и Клейна. Группа движений. Теорема Гаусса–Бонне на плоскости Лобачевского.

14. ПЛОСКОСТЬ ЛОБАЧЕВСКОГО: ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ (*)

Содержание. Решетки в \mathbb{C} и фундаментальная область $SL_2(\mathbb{Z})$ на плоскости Лобачевского. Ряд Фарей. Калейдоскопы и римановы поверхности.