

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Лектор: А.Г.Сергеев

Преподаватель: А.Ю.Пирковский

В курсе излагаются основы функционального анализа в гильбертовых и банаховых пространствах. Его кульминацией является спектральная теорема для ограниченных и неограниченных операторов. Основной упор сделан на тех вопросах, которые необходимы для приложений функционального анализа в математической физике и некоммутативной геометрии. Желательно знакомство с теорией меры (достаточно знакомства с главой V из книги Колмогорова и Фомина).

Примерная программа курса:

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА: евклидовы пространства (ортогональные системы, теорема Пифагора и неравенство Бесселя, неравенство Коши-Буняковского); гильбертовы пространства (ортогональное дополнение и теорема о проекции, сопряженное пространство и теорема Рисса); базисы в гильбертовых пространствах (теорема о существовании ортонормированного базиса, равенство Парсеваля, ортогонализация Гильберта-Шмидта, сепарабельные гильбертовы пространства; тензорные произведения гильбертовых пространств (фоковское пространство).

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА: примеры (пространства интегрируемых функций, пространства последовательностей); сопряженное пространство (второе сопряженное пространство, рефлексивность); основные теоремы (теорема Хана-Банаха, теоремы об открытом и обратном отображении, теорема о замкнутом графике, теорема Стоуна-Вейерштрасса, слабая компактность единичного шара в сопряженном пространстве).

ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ: топологии в пространствах линейных операторов (слабая сходимость ограниченных операторов); сопряженный оператор (самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, ортогональные проекторы); спектр оператора (классификация, резольвента, аналитические функции от операторов, спектральный радиус, спектр самосопряженного оператора); полярное разложение (положительные операторы и квадратные корни, частично изометрические операторы); компактные операторы (сходимость компактных операторов, аналитическая теорема Фредгольма, теорема Рисса-Шаудера); идеалы в алгебре компактных операторов (ядерные операторы, операторы Гильберта-Шмидта).

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА: функциональное исчисление и спектральные меры (функциональное исчисление ограниченных самосопряженных операторов, циклические векторы); спектральная теорема (классификация спектров, операторы с простым спектром, спектральная теорема о кратности); спектральные проекторы (проекторнозначные меры, существенный и дискретный спектры).

НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ: основные определения (график, замыкание, расширение); сопряженный оператор и резольвента (симметрические и самосопряженные операторы, критерий самосопряженности); спектральная теорема (в терминах оператора умножения, функционального исчисления и проекторнозначных мер); полугруппы операторов (экспонента от самосопряженного оператора, теорема Стоуна, теорема фон Неймана, канонические коммутационные соотношения); другие свойства неограниченных операторов (квадратичные формы и самосопряженные операторы, сходимость неограниченных операторов и спектр предельного оператора, формула Троттера, полярное разложение, тензорное произведение, приложения в квантовой механике).