Программа курса

«Логика и алгоритмы»

1 курс, 1 и 2 модуль, 2012 г.

Л.Д. Беклемишев, В.Б. Шехтман

1. Понятие множества. Равенство множеств. Аксиомы объемности, пары. Булевы операции. Бесконечные объединения и пересечения множеств. Аксиома объединения. Примеры: открытые и замкнутые множества на прямой и плоскости; канторовское множество; его замкнутость и нигде не плотность.

2. Множество всех подмножеств данного множества и аксиома степени. Упорядоченные пары (по Куратовскому). Декартово произведение множеств. Отображения множеств, инъективность, сюръективность.

3. Бинарные отношения. Отношения эквивалентности. Соответствие между разбиениями множества и отношениями эквивалентности на нём. Фактормножество. Равномощность множеств. Множество Y^X всех функций $f : X \to Y$. Биекция между $\mathcal{P}(X)$ и 2^X.

4. Натуральный ряд. Аксиома бесконечности и формальное определение множества натуральных чисел (по фон Нейману). Принцип математической индукции. Его вывод из определения натурального ряда. Принцип наименьшего числа и его эквивалентность принципу индукции.

5. Счётные множества. Подмножество счётного множества конечно или счётно. Всякое бесконечное множество имеет счётное подмножество. Объединение счётного множества счётных множеств счётно. Счётность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^k$ и $\mathbb{N}^*$ (множества всех конечных последовательностей натуральных чисел). Равномощность $\mathbb{R}$ и $2^{\mathbb{N}}$.

6. Сравнение мощностей множеств. Теорема Кантора–Бернштейна. Счётность множества (вещественных) алгебраических чисел. Несчётность $\mathbb{R}$, множество $\mathcal{P}(X)$ не равномощно X. Равномощность $\mathbb{R}$ и канторовского множества.

7. Частично упорядоченные множества. Терминология: строгий и нестрогий порядок, линейный порядок, максимальный элемент, наибольший элемент, верхняя грань множества, цепь в частично упорядоченном множестве. Диаграммы конечных множеств. Операции суммы и произведения линейно упорядоченных множеств. Примеры: $\omega + \omega$, $\omega \times \omega$.

8. Вполне упорядоченные множества. Начальные отрезки. Вполне упорядоченное множество не изоморфно никакому своему собственному начальному отрезку. Из любых двух вполне упорядоченных множеств одно изоморфно начальному отрезку другого.

9. Аксиома выбора. Теорема Цермело (всякое множество может быть вполне упорядочено). Лемма Цорна. Доказательство их эквивалентности. Следствие о том, что любые два множества сравнимы по мощности.

10. Логика высказываний, понятие формулы. Таблицы истинности, булевы функции. Теорема о представимости всякой булевой функции формулой логики высказываний. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме.

11. Язык логики предикатов. Понятие терма и формулы. Связанные и свободные вхождения переменных в формулу. Понятие модели, примеры моделей. Определение истинности формулы в модели.

12. Множества, предикаты и функции, выразимые в данной модели. Существование невыразимых множеств в модели $(\mathbb{N}, +, \times)$. Гомоморфизмы, изоморфизмы, автоморфизмы моделей. Сохранение выразимых предикатов при изоморфизме. Метод доказательства невыразимости с помощью автоморфизма.

13. Теорема о предварённой нормальной форме для формул логики предикатов.

14. Исчисление предикатов. Формальные теории. Выводимость в теории, теорема о дедукции.

15. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Теорема о компактности. Существование нестандартных моделей арифметики.

16. Машины Тьюринга. Вычислимые функции. Тезис Чёрча–Тьюринга.

17. Разрешимые и перечислимые множества и предикаты. Эквивалентные определения перечислимого множества.

18. Неразрешимость проблемы остановки для машин Тьюринга.