Алгебра, второй курс, первый семестр, осень 2012 г.

Е. Ю. Смирнов

Программа курса

Первый модуль

1. Симметрические многочлены. Элементарные симметрические многочлены. Основная теорема о симметрических многочленах.
2. Результант. Критерий наличия общего корня у двух многочленов. Вычисление результанта двух многочленов через их корни.
3. Производная многочлена. Дискриминант.
4. Прямое произведение групп. Автоморфизмы групп. Полупрямое произведение групп.
5. Коммутант группы. Коммутант как наименьшая нормальная подгруппа, фактор по которой абелев.
6. Разрешимые группы. p-группы. Нетривиальность центра p-группы. Разрешимость p-группы. Коммутативность группы порядка p^2.
7. Силовские p-подгруппы. Теоремы Силова.
8. Кватернионы. Изоморфизм $\mathrm{SU}(2)/\{\pm E\} \tilde{\to} \mathrm{SO}(3)$.

Второй модуль

1. Предмет теории представлений. Представления групп, подпредставления, факторпредставления. Неприводимые и неразложимые представления. Полная приводимость представлений конечных групп.
2. Напоминание: тензорные произведения, симметрические и внешние степени векторных пространств.
3. Характеры представлений конечных групп. Формула Бернсайда. Групповая алгебра конечной группы.
4. (*) Представления симметрической группы. Симметризаторы Юнга.
5. Начальные сведения о группах и алгебрах Ли. Соответствие между группой Ли и её касательной алгеброй.
6. Представления групп Ли SL_2, $\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SO}(3)$.
7. (*) Применение теории представлений к теории групп: теорема Бернсайда о разрешимости группы порядка $p^n q^m$.

Темы, отмеченные (*), будут разобраны, если хватит времени.

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2010 (или любое другое издание)

[2] Э. Б. Винберг. Линейные представления групп. М.: Наука, 1985.

[3] А. И. Кострикин. Введение в алгебру (1-3 части). М.: Физматлит, 2004

[4] Ж.-П. Серр. Линейные представления конечных групп. М.: Мир, 1970

[5] D. Dummit, R. Foote, Abstract Algebra, 3rd Edition, Wiley, 2003

[6] W. Fulton, J. Harris, Representation Theory: a First Course, Springer, 1991

Алгебра 2 курс III модуль

2012/2013 учебный год

Лектор: Вербицкий М.С.

Теория Галуа

Теория Галуа изучает расширения полей. Среди расширений полей особую роль играют расширения Галуа, группа автоморфизмов которых максимальна. Эта группа называется группой Галуа расширения. Основная теорема теории Галуа утверждает, что подполя расширения Галуа находятся в биективном соответствии с подгруппами его группы Галуа. Используя эту теорему, можно решать полиномиальные уравнения явно (в радикалах), либо доказывать, что решение в радикалах не существует ("теорема Абеля"). В целом, теория Галуа расширений полей аналогична теории Галуа накрытий топологических пространств. Эта аналогия легла в основу конструкции фундаментальной группы, предложенной А. Гротендиком; частным случаем этой конструкции является и группа Галуа универсального расширения и обычная фундаментальная группа, известная из топологии. В конструкции Гротендика, роль произведения накрытий играет тензорное произведение полей, а роль несвязного объединения накрытий - прямая сумма. Оказывается, что этот подход позволяет сформулировать и доказать основные результаты теории Галуа существенно проще.

Программа.

1. Конечномерные (артиновы) кольца над полем, идемпотенты, тензорное произведение артиновых колец. Структурная теорема для полупростых артиновых колец.

2. Расширения Галуа и группы Галуа.

3. Основная теорема теории Галуа.

4. Теорема о примитивном элементе.

5. Автоморфизм Фробениуса. Группы Галуа для конечных полей.

6. Циклические расширения и уравнения, разрешимые в радикалах.

7. Теорема Абеля.

8. Элементы теории чисел: числовые поля, локальные поля, пополнения, дедекиндовы области.