Часть I – взгляд из теории фуксовых групп. Алгебра фуксовых групп

Обозначения

G – связная группа Ли;

π – фундаментальная группа ориентируемой поверхности (как правило, замкнутой) рода $g > 1$;

Γ – дискретная, чаще всего, фуксова группа (не обязательно сохраняющая ориентацию);

H_+ – верхняя полуплоскость;

H^2 – гиперболическая плоскость;

$\mathrm{Hom}^0(\pi, PSL_2(\mathbb{R}))$ – пространство Вейля R^0;

T_g – пространство Тейхмюллера, понимаемое как $\mathrm{Hom}^0(\pi, PSL_2(\mathbb{R}))/PSL_2(\mathbb{R})$;

M_g – пространство модулей;

$\mathrm{Out}\pi = \mathrm{Aut}\pi/\mathrm{Int}\pi = \mathrm{Mod}_g$ – модулярная группа или группа классов отображений.

Дедушкино тождество: X, $Y \in SL(2,\mathbb{C})$. Тогда $\mathrm{tr}XY + \mathrm{tr}XY^{-1} = \mathrm{tr}X\mathrm{tr}Y$.

$[f]$ - точка пространства T_g ($f \in \mathrm{Hom}^0(\pi, PSL_2(\mathbb{R}))$);

$\mathrm{tr}_{[f]}(= |\mathrm{tr}f(\gamma)|, \gamma \in \pi)$ – функция следа на π, связанная с представлением $f \in \mathrm{Hom}(\pi, PSL_2(\mathbb{R}))$;

$(\mathbb{R}, +)$ – вещественные числа как группа по сложению;

$(\mathbb{Q}_p, +)$ – p-адические числа как группа по сложению.

Если $a \in PSL_2(\mathbb{R})$, то A – любая из двух матриц, представляющих движение a в группе $SL_2(\mathbb{R})$.

$(AB) = ABA^{-1}B^{-1}$.

1. Доказать, что замкнутая подгруппа Γ группы $(\mathbb{R}, +)$ есть либо решетка, либо все $\mathbb{R}$.

2. Описать все замкнутые подгруппы в группе $(\mathbb{Q}_p, +)$.

3*. В группе $PSL_2(\mathbb{R})$ любая собственная замкнутая связная подгруппа L сохраняет либо точку "на бесконечности", либо геодезическую, либо точку в H_+. Доказать.

4. Верно ли, что по числам $|\mathrm{tr}A|$, $|\mathrm{tr}B|$, $|\mathrm{tr}A^{-1}B|$, $|\mathrm{tr}AB|$ можно восстановить пару гиперболических движений a и b с точностью до сопряжения?

5. Пусть A и $B \in SL(2,\mathbb{C})$. Доказать, что у матриц A и B тогда и только тогда есть общий собственный вектор, когда $\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) = 2$.

6. Показать, что два гиперболических движения a и b тогда и только тогда имеют общую неподвижную точку, когда матрицы A и B имеют общий собственный вектор.

7. Может ли коммутатор двух гиперболических движений быть:

а) параболическим преобразованием;

б) эллиптическим преобразованием.

8. Пусть Γ – фуксова группа, не содержащая абелевой подгруппы конечного индекса (такие группы принято называть неэлементарными).

Доказать, что :

а) в Γ не могут существовать два некоммутирующих гиперболических движения с общей неподвижной точкой,

б) в Γ не могут существовать гиперболическое и параболическое движения с общей неподвижной точкой.

9. Пусть Γ – фуксова группа, содержащая параболический сдвиг $z \to z+1$, $z \in H_+$. Назовем число $y = \mathrm{Im} z$ высотой точки верхней полуплоскости. Доказать, что высоты всех точек произвольной орбиты $\{\Gamma z\}$, $z \in H_+$, ограничены сверху некоторой константой (зависящей от z).

10** Пусть $f\colon \pi \to PSL_2(\mathbb{R})$ инъективное вложение фундаментальной группы замкнутой поверхности рода $g > 1$ в группу собственных движений гиперболической плоскости в виде замкнутой подгруппы. Тогда группа $\Gamma = f(\pi)$ автоматически дискретна и кокомпактна. Доказать.

Можно ли отказаться от условия замкнутости?

11. Доказать теорему Нильсена: замкнутая подгруппа группы $PSL_2(\mathbb{R})$, состоящая из гиперболических движений и содержащая два некоммутирующих элемента, дискретна.

12. Придумать свое или разобрать в "белой книге" С.М. Натанзона (экземпляр, подаренный автором, хранится в 314 и выдается по первому требованию) доказательство следующей замечательной теоремы Пуанкаре-Клейна-Фрике-Кин-Натанзона:
пусть Γ – группа униформизации римановой поверхности рода 2 (род 2 взят для простоты) с отмеченными образующими a_1, b_1, a_2, b_2, удовлетворяющими соотношению $(a_1 b_1)(a_2 b_2) = 1$. Тогда на гиперболической плоскости существует выпуклый канонический восьмиугольник, стороны которого попарно отождествляются движениями a_i, b_i, $i = 1, 2$, и который служит плиткой для группы Γ.

13. Выяснить, как следующие три однопараметрические подгруппы $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ группы $PSL_2(\mathbb{R})$ действуют на

а) голоморфное векторное поле $\varphi(z)\dfrac{d}{dz}$, $\varphi \in \mathrm{Hol}(H_+)$;
б) голоморфную 1-форму $\varphi(z)dz$.

14. Пусть Γ - нормализатор группы Γ в группе $PGL_2(\mathbb{R})$. Доказать, что группа $N(\Gamma)/\Gamma$ канонически изоморфна группе голоморфных и антиголоморфных автоморфизмов замкнутой римановой поверхности H_+/Γ.

15. Доказать, что группа $N(\Gamma)/\Gamma$ конечна.

Литература (тонкие книги на родном языке)

1. У. Абикоф Вещественно-аналитическая теория пространств Тейхмюлолера, Мир, 1985.

2. У. Терстен Трехмерная геометрия и топология, МЦНМО, ?

3. Л. Альфорс, Л. Берс Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, Мир, 1961 (особенно статьи Л. Берса "Пространства римановых поверхностей" и Л. Альфорса о комплексной структуре)

4. Книга Хэтчера "Алгебраическая топология" содержит много полезных сведений о группе классов отображений, МЦНМО, 200?

5. С.Б. Каток "Фуксовы группы", МЦНМО, 200?