Задачи для сдачи спецкурса "Пространства Тейхмюллера" II

Гиперболическая геометрия и топология

S – гиперболическая замкнутая поверхность;

$p(c)$ – единственная замкнутая геодезическая в свободном гомотопическом классе $[c]$.

1. Можно ли на $\mathbb{C}^*$ ввести полную гиперболическую метрику?

2. Изометричны ли гиперболические кольца

а) $\frac{1}{2} < |z| < 1$;

б) $\frac{1}{2} < |z| < 1$ и $\frac{1}{3} < |z| < 1$?

3. Пусть c и d простые замкнутые кривые на S, которые пересекаются в единственной точке. Тогда $p(c)$ и $p(d)$ обладают тем же свойством.

4. В гиперболическом четырехугольнике $ABCD$ угол $\angle A$ при вершине A равен $\pi/2$, $\angle D = \pi/2$, $\angle B = \pi/\infty$, $\angle C = \pi/\infty$. Сторона AD равна l. Найти расстояние от стороны BC до стороны AD.

5. Рассмотрим ε-банан V_ε вокруг геодезической l, которая служит осью гиперболического сдвига γ на величину L. Найти площадь цилиндра $V_\varepsilon/\langle\gamma\rangle$.

6. Доказать, что $\mathrm{area} S = -4\pi\chi(S)$, ($\chi(S)$ – эйлерова характеристика).

7. Доказать, что утверждение предыдущей задачи верно и для поверхностей (конечного типа) с проколами (верно оно и для компактных гиперболических поверхностей с геодезическим краем).

8. Пусть D – диаметр S, а m – длина систолы. Доказать, что $2m \operatorname{sh} D \geq \mathrm{area} S$.

9. Идеальный гиперболический выпуклый четырехугольник склеивается по схеме тора. Каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять "склеивающие" движения γ_1 и γ_2, чтобы в результате получился полный гиперболический проколотый тор T'.

10. Вычислить модулярную группу сферы S^2.

11. Вычислить модулярную группу проколотого тора.

12. Пусть γ_1 и γ_2 – два некоммутирующих гиперболических движения из кокомпактной фуксовой группы Γ, действующей на гиперболической плоскости без неподвижных точек. Доказать, что $\operatorname{sh}\frac{d(x,\gamma_1 x)}{2}\operatorname{sh}\frac{d(x,\gamma_2 x)}{2} \geq 1$ для любой точки $x \in H^2$.