

Механика и теория поля. Задачи к экзамену 26.12.2012

1. Точечный электрический заряд q движется относительно лабораторной системы отсчета прямолинейно с постоянной скоростью v . Пользуясь преобразованием Лоренца из сопутствующей заряду системы отсчета в лабораторную, получите выражения для векторов напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых зарядом в лабораторной системе отсчета.

2. В трехмерном пространстве Минковского с метрическим тензором $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ задано действие для вещественного векторного поля $A_\mu(x)$, взаимодействующего с комплексным скалярным полем ϕ

$$S[A] = \int_{M_3} d^3x \left[\varepsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \overline{\nabla^\mu \phi} \nabla_\mu \phi \right], \quad \nabla_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu,$$

где $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный тензор третьего ранга, нормированный условием $\varepsilon^{012} = 1$.

- Инвариантно ли действие относительно калибровочных преобразований полей?
- Напишите уравнения движения полей ϕ и A_μ .
- Найдите тензор энергии-импульса этой системы.

3. В пространстве Минковского M_3 найдите запаздывающую функцию Грина для уравнения движения свободного безмассового скалярного поля:

$$\square G(x) = \delta^{(3)}(x), \quad G(x) \equiv 0 \quad \text{при} \quad x^0 < 0.$$

Здесь $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, а $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве M_3 .

4. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в присутствии токов имеют вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

Какой смысл имел бы 4-вектор \tilde{j}^μ , если бы уравнение для дуального тензора имело аналогичный вид:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} \tilde{j}^\nu ?$$

5. Точечный заряд $-q$ движется по окружности радиуса R вокруг закрепленного точечного заряда $q > 0$. Период обращения равен T . Определите среднюю за период обращения интегральную мощность дипольного излучения этой системы (то есть, суммарную мощность дипольного излучения по всем направлениям).

6. Докажите, что у замкнутой системы материальных точек, у которых отношения их зарядов к массам совпадают, отсутствует электрическое дипольное излучение.