Факультет математики НИУ ВШЭ
Письменный вступительный экзамен в аспирантуру

17 октября 2012 г.

(продолжительность экзамена 5 часов)

1. Пусть функция f непрерывна на луче $[0, +\infty)$, дифференцируема на $(0, +\infty)$, причем ее производная строго возрастает, и $f(0) = 0$. Докажите, что $g = f(x)/x$ тоже строго возрастает на $(0, +\infty)$.

2. При каких n существует вещественная $n \times n$ матрица A, удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7E = 0?$$

Через E обозначена единичная $n \times n$ матрица.

3. Сколько автоморфизмов имеет группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

4. Функция непрерывна в замкнутом единичном круге на комплексной плоскости и голоморфна в его внутренности. Может ли образ границы круга быть равен единичной окружности $\{z\colon |z| = 1\}$, объединенной с отрезком $[1, 2]$ на действительной оси?

5. Докажите, что не существует простых групп порядка 30.

6. Найдите сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

7. (а) Обозначим через X объединение двух непересекающихся окружностей, а через $\mathbb{T}^2$ — двумерный тор (то есть прямое произведение двух окружностей). Докажите, что не существует таких непрерывных отображений $f : X \to \mathbb{T}$ и $g : \mathbb{T} \to X$, что $g \circ f$ является тождественным отображением на X.

(б) Останется ли утверждение пункта (а) верным, если вместо объединения двух непересекающихся окружностей взять фигуру 8 (то есть объединение двух окружностей, пересекающихся по точке)?