Листок 1. 14 января 2013

Задача 1. Вычислить ω^n для формы $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + ... + dp_n \wedge dq_n$, $(p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n)$ – координаты на $\mathbb{R}^{2n}$.

Задача 2. Вывести формулу для подстановки векторного поля во внешнее произведение двух дифференциальных форм.

Задача 3. Доказать, что если два векторных поля касаются подмногообразия, то и их коммутатор касается этого подмногообразия.

Задача 4. Пусть α дифференциальная 1-форма, нигде не обращающаяся в ноль. Какие из следующих условий следуют одно из другого: (1) $\alpha \wedge d\alpha = 0$; (2) дифференциальная 2-форма $d\alpha$ делится на α, т.е. $d\alpha = \alpha \wedge \beta$ для некоторой дифференциальной 1-формы β; (3) для каждой точки x ограничение формы $d\alpha(x)$ на ядро формы $\alpha(x)$ равно нулю.

Задача 5. Пусть v, w – векторные поля на трехмерном многообразии, линейно независимые в каждой точке. Доказать, что натянутое на эти поля поле двумерных площадок интегрируемо если и только если векторные поля $[v, w]$, v, w линейно зависимы в каждой точке.

Задача 6. Рассмотрим векторные поля в $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, z): $v = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$, $w = 2xz\frac{\partial}{\partial x} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial z}$. Где эти поля линейно независимы? Для каких точек трехмерного пространства выполняется условие интегрируемости площадок, натянутых на эти поля? Найти все двумерные компактные интегральные многообразия соответствующего поля двумерных площадок.