**ЛИСТОК 1**
**Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ**
прием задач: 21.02.2013

**1** Докажите, что гипербола $xy = 1$ в аффинной плоскости не изоморфна аффинной прямой.

**2** Пусть $k = \bar{k}$, $f : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^2_k$ отображение, заданное формулой $f(t) = (t^2, t^3)$. Покажите, что $f$ биекция на свой образ, но образ $f$ не изоморфен $\mathbb{A}^1$ (указание: можно вспомнить про целозамкнутость).

**3** Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ - множество точек вида $(t, t^2, t^3)$. Покажите, что $X$ алгебраическое множество и найдите систему образующих идеала $I(X)$. Покажите, что $X$ изоморфно $\mathbb{A}^1$.

**4** Покажите, что отображение из задачи 2 - бирациональный конечный морфизм.

**5** Размерностью аффинного алгебраического множества назовем размерность его кольца регулярных функций. Покажите, что неприводимое алгебраическое подмножество в $\mathbb{A}^n$ (над алгебраически замкнутым полем) тогда и только тогда имеет размерность $n-1$, когда оно является множеством нулей неприводимого многочлена $f$ (воспользуйтесь теоремой Крулля о главных идеалах).

**6** Покажите, что неприводимая квадрика (т.е. множество нулей неприводимого многочлена второй степени) в $\mathbb{A}^{n+1}_k$ бирационально изоморфна $\mathbb{A}^n_k$ тогда и только тогда, когда она имеет $k$-точку.

**Индуктивный предел** (он встречается в определении слоя пучка)

**7** Частично упорядоченное множество $I$ называется направленным, если для любых $i, j$ существует такое $k$, что $i \leq k$, $j \leq k$. Пусть $I$ направленное множество, причем для каждого $i \in I$ задано множество (абелева группа, кольцо) $A_i$, для каждой пары $i \leq j$ задан гомоморфизм $f_{ij} : A_i \to A_j$, и выполнены условия $f_{ii} = id$, $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ (говорят, что $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$ - индуктивная система) . Индуктивный предел $\varinjlim A_i$ - это фактормножество несвязного объединения $A_i$ по отношению эквивалентности: $s_i \sim s_j$, если найдется такое $k \geq i, j$, что $f_{ik}(s_i) = f_{jk}(s_j)$. Очевидно, имеются естественные отображения $f_i : A_i \to \varinjlim A_i$.

Покажите, что если $A_i$ - абелевы группы (кольца), то и $\varinjlim A_i$ тоже. Покажите, что $\varinjlim A_i$ характеризуется следующим универсальным свойством: если $B$ - множество (абелева группа, кольцо) и для каждого $i$ задан гомоморфизм $b_i : A_i \to B$ со свойством $b_j f_{ij} = b_i$, то все $b_i$

единственным образом проводятся через $\varinjlim A_i$.

**8** Пусть $\mathbf{A} = (A_i, f_{ij})$, $\mathbf{B} = (B_i, g_{ij})$ индуктивные системы. Гомоморфизмом индуктивных систем $\phi$ называется семейство гомоморфизмов $\phi_i : A_i \to B_i$ , для которого $\phi_j f_{ij} = g_{ij}\phi_i$. Покажите, что $\phi$ однозначно определяет гомоморфизм индуктивных пределов, коммутирующий с естественными отображениями из $A_i$ и $B_i$ в пределы. Последовательность индуктивных систем абелевых групп называется точной, если для всех индексов точна соответствующая последовательность абелевых групп. Докажите, что индуктивный предел сохраняет точность.

Что это утверждение говорит о пучках?

**9** Ядро гомоморфизма предпучков $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ - это такой предпучок: $ker(\phi)(U) = ker(\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$. Докажите, что если $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ пучки, то $ker(\phi)$ тоже. Приведите пример, где аналогично определенное коядро гомоморфизма предпучков $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ не является пучком, хотя $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ пучки.

**10** Пусть $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ морфизм пучков. Докажите, что если индуцированные гомоморфизмы слоев $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ инъективны, то $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ инъективны.

**11** То же с изоморфностью вместо инъективности.

**12** Приведите пример нелокального морфизма окольцованных пространств $Spec(B) \to Spec(A)$, не индуцированного гомоморфизмом колец $\phi : A \to B$.

В упражнениях 13-15 основное поле предполагается алгебраически замкнутым; рекомендуется проверить, что происходит над произвольным полем.

**13** Докажите, что аффинное многообразие не может быть изоморфно проективному, если это не точка. Выведите отсюда, что любое подмногообразие положительной размерности в $\mathbb{P}^n$ пересекает любую гиперплоскость.

**14** Пусть $F_0, \dots, F_N$ все мономы степени $d$ от $x_0, \dots, x_n$ . Определим отображение Веронезе $v_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ формулой $v_d(a_0 : \dots : a_n) = (F_0(a) : \dots : F_N(a))$, где $a = (a_0, \dots, a_n)$. Докажите, что образ $v_d$ - проективное многообразие и $v_d$ определяет изоморфизм на свой образ.

**15** Используя отображение Веронезе, докажите, что любые две кривые в $\mathbb{P}^2$ пересекаются.