Высшая школа экономики. Факультет математики
Итоговая государственная аттестация

Образцы задач

1. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, такая, что $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень на интервале $(0,1)$.

2. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin 1 \sin 2 \cdots \sin n)$.

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что
$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$$
при всех x, $y \in \mathbb{R}$.

4. Найдите восьмую производную функции $f(x) = \sin(\sin(x))$ в точке $x = 0$.

5. Докажите, что
$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
при всех $x > 0$.

6. Найдите кривую, касающуюся всех прямых вида $y = px - e^p$.

7. Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$. Найдите образ вектора $(1,2)$ при отображении первого дифференциала $d_{(1,1)}\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отображения ϕ в точке $(1,1)$.

8. Сходится ли ряд $-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} - \cdots$?

9. Равномерно ли сходится ряд $\sum\limits_{n\ge 0} \frac{x^n}{n}$ на отрезке $[-1,0]$?

10. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n\ge 0} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

11. Придумайте функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющую в точке $x_0 \in \mathbb{R}^2$ производную по любому направлению, непрерывную в x_0, но не дифференцируемую в x_0.

12. Найдите $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

13. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть функция $F \in C^2(U)$ такова, что $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности (x_0, y_0). Выразите $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

14. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид наименьшего объема.

15. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

   (a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz$;

(b) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z e^{1/(z+2)}} dz;$

(c) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz;$

(d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-1/z}}{z^2+1} dz.$

16. Вычислите несобственный интеграл.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-2x+10} dx;$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2} dx;$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2+x^4} dx;$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx;$

17. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = (1+y^2)\cos x\,.$$

18. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}\;.$$

19. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = x\sin x\;.$$

20. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y, \end{cases}$$

и нарисуйте фазовый портрет.

21. Колебания пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 затухают благодаря трению, пропорциональному скорости маятника. При каком коэффициенте трения маятник не дойдет до положения равновесия ни разу за конечное время; пройдет это положение 1 раз, пройдет положение равновесия бесконечно много раз?

22. Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m с коэффициентом жесткости пружины k^2 под действием внешней силы $F = \sin\omega t$ в отсутствие силы трения. Напишите решение в случае $\omega = 1$.

23. (a) Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m под действием внешней силы $F = \sin\omega t$, если коэффициент жесткости равен k^2, а коэффициент трения равен a.

(b) Для какой частоты ω колебаний внешней силы амплитуда вынужденных колебаний максимальна?

24. Является ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек с иррациональными координатами (a) открытым, (b) замкнутым, (c) связным, (d) линейно связным, (e) всюду плотным?

25. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

26. Какие из букв `A, O, T, K, B` гомеоморфны? Гомотопически эквивалентны?

27. Пусть Y — топологическое пространство, имеющее форму буквы Y, X — топологическое пространство, имеющее форму буквы X, а $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Докажите, что существуют две различные точки $a, b \in X$, для которых $f(a) = f(b)$.

28. Пусть $f, g : S^2 \to R$ — две непрерывные функции на сфере. Докажите, что существуют две различные точки $a, b \in S^2$ такие, что $f(a) = f(b)$ и $g(a) = g(b)$.

29. Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n.

30. Докажите. что у любого набора попарно коммутирующих операторов на конечномерном пространстве есть общий собственный вектор.

31. Найдите размерность пространства многочленов от n переменных общей степени k.

32. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

    (a) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;

    (b) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;

    (c) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

    Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

33. Пусть X, Y — конечномерные векторные пространства, $T \colon X \to Y$ — линейный оператор. Докажите, что T сюръективен тогда и только тогда, когда его сопряженный $T^* \colon Y^* \to X^*$ инъективен, и наоборот.

34. Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь в случае, когда векторы x и y отличаются неотрицательным скалярным множителем.

35. Докажите, что на комплексном векторном пространстве неотрицательно определенная билинейная форма (т.е. билинейная форма f, удовлетворяющая условию $f(x, x) \geq 0$ для всех x) тождественно равна нулю.

36. Пусть T — линейный оператор в векторном пространстве X. Положим $X_0 = \operatorname{Ker} T$ и обозначим через T_0 линейный оператор в факторпространстве X/X_0, действующий по формуле $T_0(x + X_0) = T(x) + X_0$ (где $x \in X$). Докажите, что $T^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $T_0^{n-1} = 0$.

37. Пусть X — конечномерное векторное пространство, T — линейный оператор в X, матрица которого в некотором базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ — жорданова клетка. Докажите, что подпространство $Y \subseteq X$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $Y = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ для некоторого k.

38. Докажите, что линейный оператор T в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in K$ выполнено равенство $\operatorname{rk}(T - \lambda 1) = \operatorname{rk}(T - \lambda 1)^2$.

39. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдите расстояние от начала координат до аффинной гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1$.

40. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, F — квадратичная форма с положительным индексом инерции p и отрицательным индексом инерции q. Чему равна максимальная размерность такого подпространства $W \subseteq V$, что $F|_W = 0$?

41. Пусть в евклидовом пространстве V задан самосопряженный оператор A, у которого все корни характеристического многочлена меньше единицы. Докажите, что A переводит единичный шар с центром в нуле в себя.

42. Известно, что минимальный многочлен оператора A в конечномерном комплексном векторном пространстве V не имеет кратных корней. Докажите, что число инвариантных подпространств в V конечно тогда и только тогда, когда все собственные значения A различны.

43. Существует ли поле из 6 элементов?

44. Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

45. Изоморфны ли группы $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ (где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов) и группа диэдра D_4 (т.е. группа симметрий квадрата)?

46. Постройте изоморфизм групп S_3 и $SL_2(\mathbb{Z}_2)$.

47. Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Докажите, что группы $\mathbb{C}^\times / U_n$ и $\mathbb{C}^\times$ изоморфны.

48. Докажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.

49. Разлагается ли группа $GL(2, \mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL(2, \mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$? Верно ли аналогичное утверждение для $GL(3, \mathbb{R})$?

50. Докажите, что любая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

51. Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d, делящего n, в G существует единственная подгруппа порядка d.

52. Пусть R — евклидово кольцо, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.

53. Пусть p — минимальное число, делящее порядок конечной группы G, а $H \subset G$ — подгруппа индекса p. Докажите, что H обязательно нормальна.

54. Пусть конечная группа G имеет две факторгруппы F_1 и F_2, порядки которых взаимно просты, причем $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что $G \cong F_1 \times F_2$.

55. Докажите соотношения для обобщенных чисел сочетаний

$$\text{а)} \quad \binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}, \qquad \text{б)} \quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}.$$

56. Вычислите производящие функции для последовательностей

$$\text{а)} \quad 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots \qquad \text{б)} \quad n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+k)^2, \ldots$$

57. Докажите соотношения

$$\text{а)} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{a+n}{n}, \qquad \text{б)} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} s^k = \frac{(1+\sqrt{s})^n + (1-\sqrt{s})^n}{2}.$$

58. Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n-ого числа Фибоначчи.

59. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями и рекуррентным соотношением

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \ \ (n > 1)\,.$$

60. Производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $A(s) = \frac{1+4s-3s^2}{1-4s+3s^2}$. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

61. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы рекуррентными соотношениями и начальными условиями

$$\begin{aligned} a_0 = 5, \quad a_1 = 3, \qquad a_n &= 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \ (n > 1); \\ b_0 = 1, \quad b_1 = 4, \qquad b_n &= 5b_{n-1} - 6b_{n-2} \ \ (n > 1). \end{aligned}$$

Сравните числа a_n и b_n при достаточно больших n.

62. Пусть ξ, η — случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы случайные величины ξ^2, η^2?

63. Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором вдоль оси абсцисс и единичным вектором в случайном направлении. Найдите распределение длины третьей стороны.

64. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найдите функцию распределения случайной величины $\frac{\xi+|\xi|}{2}$.

65. Доказать, что $D\xi = \min_a \mathbb{E}(\xi - a)^2$.

66. Случайные величины ξ, η независимы и имеют математическое ожидание a и дисперсию σ^2. Найдите коэффициент корреляции случайных величин $\xi_1 = \alpha\xi + \beta\eta$, $\xi_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

67. Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена на отрезке $[a_n - 1, a_n + 1]$, причем ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ сходится. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(0 \le \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{\sqrt{n}} \le 1\Big).$$