

ЛИСТОК 2. УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА. ЗАДАЧА КОШИ
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ.

УРЧП, 3-4 КУРС, 5.02.2013

2◊1 Найдите общие решения уравнений 1-го порядка

а) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

2◊2 Решите задачу Коши

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_x - 2u_y = 8, \quad u|_{x=0} = -2y, \quad u_y|_{x=0} = 2(y-1).$$

2◊3 Почему нельзя найти такую функцию $u(x, y)$, которая удовлетворяла бы уравнению

$$u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$$

и условиям $u|_{y=x+1} = x + x^2$, $u_x|_{y=x+1} = x^2 - x$?

2◊4 Какой должна быть функция $g(x)$, чтобы существовало решение задачи Коши

$$u_{xx} + 5u_{xy} + 6u_{yy} = 0, \quad u|_{y=3x+2} = 4x^2 + 1, \quad u_x|_{y=3x+2} = g(x)?$$

2◊5 а) Описать колебания бесконечной струны, происходящие при $t \in (-\infty, +\infty)$ и такие, что некоторый участок струны $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ покоится в течение всего времени этих колебаний.

б) Тот же вопрос, но участок струны $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ покоится при $t \geq 0$.

2◊6 Нарисуйте графики функций $u(x, t)|_{t=t_k}$ при $t_k = \frac{kl}{4a}$, $k = 0, \dots, 5$, являющейся решением задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = v_0(x),$$

где

$$\text{а) (Струна гитары.) } v_0(x) \equiv 0, u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, l] \cup [3l, +\infty) \\ \frac{a}{l}x - a, & x \in [l, 2l] \\ -\frac{a}{l}x - 3a, & x \in [2l, 3l] \end{cases};$$
$$\text{б) (Струна рояля.) } u_0(x) \equiv 0, v_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, l] \cup (2l, +\infty) \\ a, & x \in [l, 2l] \end{cases}.$$