Квантовая теория поля

Листок 3. Вторичное квантование.

Обязательные задачи: 1, 2а, 2в, 2г, 4а, 4б, 4в, 4г, 4е, 5а.

1. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство одночастичных состояний некоторой квантовомеханической системы, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{H}$. Введем обозначения

$$|\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\rangle_\pm := S_\pm|\varphi_1 \otimes \varphi_2 \otimes \ldots \otimes \varphi_n\rangle \in \mathcal{H}_\pm^{\otimes n}.$$

Здесь S_+ — оператор симметризации, S_- — оператор антисимметризации, $H_+^{\otimes n} = S_+\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathrm{Sym}^n(\mathcal{H})$ — бозонное пространство n-частичных состояний, $H_-^{\otimes n} = S_-\mathcal{H}^{\otimes n} = \mathrm{Alt}^n(\mathcal{H})$ — фермионное пространство n-частичных состояний. Докажите, что

$$|\ldots\varphi_i\ldots\varphi_j\ldots\rangle_+ = |\ldots\varphi_j\ldots\varphi_i\ldots\rangle_+,$$
$$|\ldots\varphi_i\ldots\varphi_j\ldots\rangle_- = -|\ldots\varphi_j\ldots\varphi_i\ldots\rangle_-.$$

2. Фиксируем какой-нибудь базис $\{|\psi_r\rangle\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ одночастичных состояний. Введем представление чисел заполнения

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle_\pm := \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots}}|\psi_{r_1}, \psi_{r_2}, \ldots\rangle_\pm,$$

где n_i — количество индексов среди $\{r_1, r_2, \ldots\}$, равных i, $n = n_1+n_2+\ldots$, $n_i \in \mathbb{N}$ для бозонов, $n_i = 0, 1$ для фермионов.

а) Докажите, что $\{|n_1, n_2, \ldots\rangle_\pm\}$ — базис $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$.

б) Скалярное произведение на $\mathcal{H}$ индуцирует скалярное произведение на $\mathcal{H}_\pm^{\otimes n}$ по формуле

$$_\pm\langle\varphi_1, \ldots, \varphi_n|\psi_1, \ldots, \psi_n\rangle_\pm = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in S_n}(\pm1)^\pi\langle\varphi_1|\psi_{\pi(1)}\rangle\ldots\langle\varphi_n|\psi_{\pi(n)}\rangle.$$

Докажите, что базис из предыдущего пункта является ортонормированным.

в) Пусть $\{|\psi_r\rangle\}$ — базис собственных векторов некоторой одночастичной наблюдаемой A: $A|\psi_r\rangle = \alpha_r|\psi_r\rangle$. Докажите, что $|n_1, n_2, \ldots\rangle$ является собственным вектором наблюдаемой $A_{(n)}$ с собственным значением $\sum_r n_r\alpha_r$. Здесь $A_{(n)} = \sum_{j=1}^n A_j$, где $A_j = I \otimes \ldots \otimes A \otimes \ldots \otimes I$.

г) Введем пространство Фока

$$\mathcal{F}_\pm := \bigoplus_{n=0}^\infty \mathcal{H}_\pm^{\otimes n}.$$

Докажите, что состояния $|n_1, n_2, \ldots\rangle_\pm$, $\sum_r n_r < \infty$ образуют базис этого пространства.

3. На пространстве Фока определим операторы рождения

$$a_\varphi^* |\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle_\pm := \sqrt{n+1} |\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle_\pm$$

и уничтожения

$$a_\varphi |\varphi_1, \ldots, \varphi_n\rangle_\pm := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (\pm 1)^{i-1} |\varphi_1, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots, \varphi_n\rangle_\pm \langle \varphi | \varphi_i \rangle.$$

   а) Убедитесь, что
   $$|\varphi_1, \ldots \varphi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a_{\varphi_1}^* \ldots a_{\varphi_n}^* |0\rangle.$$

   б) Докажите, что операторы a_φ и a_φ^* сопряжены.

   в) Докажите, что бозонные и фермионные соответственно операторы рождения/уничтожения удовлетворяют соотношениям
   $$a_\varphi a_\psi \mp a_\psi a_\varphi = 0, \quad a_\varphi^* a_\psi^* \mp a_\psi^* a_\varphi^* = 0,$$
   $$a_\varphi a_\psi^* \mp a_\psi^* a_\varphi = \langle \varphi | \psi \rangle I.$$

4. Фиксируем базис $\{|\psi_r\rangle\}$ в пространстве одночастичных состояний $\mathcal{H}$. Будем обозначать $a_r^* := a_{\psi_r}^*$, $a_r := a_{\psi_r}$.

   а) Убедитесь, что
   $$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{(a_1^*)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(a_2^*)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \ldots |0\rangle.$$

   б) Докажите
   $$\begin{cases} a_r^* | \ldots n_r \ldots \rangle_+ = \sqrt{n_r + 1} | \ldots n_r + 1 \ldots \rangle_+ \\ a_r | \ldots n_r \ldots \rangle_+ = \sqrt{n_r} | \ldots n_r - 1 \ldots \rangle_+ \end{cases},$$
   $$\begin{cases} a_r^* | \ldots n_r \ldots \rangle_- = (1 - n_r)(-1)^{\gamma_r} | \ldots n_r + 1 \ldots \rangle_- \\ a_r | \ldots n_r \ldots \rangle_- = n_r (-1)^{\gamma_r} | \ldots n_r - 1 \ldots \rangle_- \end{cases},$$
   где $\gamma_r = \sum_{s=1}^{r-1} n_s$.

   в) Докажите, что бозонные операторы рождения/уничтожения удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям
   $$[a_r, a_s^*] = \delta_{rs}, \quad [a_r, a_s] = 0, \quad [a_r^*, a_s^*] = 0.$$
   Если $\dim \mathcal{H} = m < \infty$, то ассоциативная алгебра, порожденная a_r, a_r^* и этими соотношениями, называется алгеброй Вейля и обозначается W_m.

г) Докажите, что фермионные операторы рождения/уничтожения удовлетворяют каноническим антикоммутационным соотношениям

$$\{a_r, a_s^*\} = \delta_{rs}, \quad \{a_r, a_s\} = 0, \quad \{a_r^*, a_s^*\} = 0.$$

Если $\dim \mathcal{H} = m < \infty$, то ассоциативная алгебра, порожденная a_r, a_r^* и этими соотношениями, называется алгеброй Клиффорда и обозначается Cl_m.

д) Найдите собственные вектора и собственные значения оператора $N_r := a_r^* a_r$.

е) Докажите, что любое состояние, полученное из вакуума $|0\rangle$ применением операторов a_r и a_r^*, может быть сведено к линейной комбинации состояний, в которых символы a_r не встречаются.

5. а) Пусть A — одночастичная наблюдаемая, A — соответствующий ей оператор в пространстве Фока. Докажите, что

$$\mathrm{A} = \sum_{r,s} \langle \psi_r | A | \psi_s \rangle a_s^* a_r.$$

б) Пусть V — двухчастичная наблюдаемая, V — соответствующий ей оператор в пространстве Фока. Докажите, что

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2} \sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \langle \psi_{r_1}, \psi_{r_2} | V | \psi_{s_1}, \psi_{s_2} \rangle a_{r_1}^* a_{r_2}^* a_{s_1} a_{s_2}.$$

6. а) Рассмотрим свободную частицу в потенциале V, $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$. Покажите, что

$$\mathrm{H} = \int a_x^* \Big(-\frac{h^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \Big) a_x dx = \int \frac{p^2}{2m} a_p^* a_p \frac{dp}{2\pi} + \iint \tilde{V}(q) a_{p+q}^* a_p \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi},$$

где $\tilde{V}(q) := \int V(x) e^{-iqx} dx$.

б) Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих по закону Кулона $V(x,y) = \frac{e^2}{|x-y|}$. Покажите, что

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2} \int \frac{4\pi e^2}{k^2} a_{p+k}^* a_{q-k}^* a_p a_q \frac{dk}{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi}.$$

Нарисуйте соответствующие фейнмановские диаграммы.

7*. Докажите, что

а) алгебра Ли квадратичных элементов алгебры Вейля W_m изоморфна $\mathfrak{sp}(2m, \mathbb{C})$;

б) алгебра Ли квадратичных элементов алгебры Клиффорда Cl_m изоморфна $\mathfrak{so}(m, \mathbb{C})$.