**ЛИСТОК 2**
**Введение в алгебраическую геометрию - матфак ВШЭ**
прием задач: 14.03.2013

В упражнениях 1-3 (Шафаревич, гл. V.3) речь пойдет об окольцованных факторпространствах. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ окольцованное пространство, $G$ - группа, состоящая из его автоморфизмов, $Y$ множество орбит действия $G$ на $X$ (фактормножество), $p : X \to Y$ естественная проекция. Топологию вводим так: $U$ открыто тогда же, когда и $p^{-1}U$. Наконец, положим $\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_X(p^{-1}U)^G$ ($A^G$ обозначает $G$-инварианты $A$). Обозначение: $Y = X/G$.

**1** Проверить, что $(X/G, \mathcal{O}_{X/G})$ окольцованное пространство.

**2** Пусть $k$ бесконечное поле, $X = \mathbb{A}^2_k - (0,0)$, $G$ состоит из всех умножений на ненулевой скаляр из $k$. Проверить, что $X/G \cong \mathbb{P}^1_k$.

**3** В условиях задачи 2 пусть $G$ состоит из автоморфизмов $(x, y) \mapsto (ax, a^{-1}y)$, $a \neq 0$. Показать, что $X/G$ схема, а $\mathbb{A}^2_k/G$ нет.

Следующие несколько упражнений - это конструкция расслоенного произведения в категории схем. Напомним, что если $X, Y$ схемы над $S$, то их расслоенное произведение - это тройка из $S$-схемы и двух $S$-морфизмов $(X \times_S Y, p, q)$, $p : X \times_S Y \to X$, $q : X \times_S Y \to Y$, которая определяется следующим универсальным свойством: если $Z$ схема над $S$ с $S$-морфизмами $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ , то существует единственный $S$-морфизм $h : Z \to X \times_S Y$, такой, что $f = ph$, $g = qh$ (здесь и далее схема над $S$, или $S$-схема - это просто схема $X$ вместе с морфизмом в $S$ , а $S$-морфизм схем над $S$ - морфизм, коммутирующий с отображениями в $S$).

**4** (склейка $S$-схем) Пусть $(X_i), i \in I$ семейство $S$-схем, $X_{ij}, j \in I$ открытые подсхемы $X_i$ (т.е. открытые подмножества с индуцированной структурой схемы) и заданы $S$-изоморфизмы $f_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$ такие, что $f_{ii} = id$, $f_{ij} = f_{ji}^{-1}$, $f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$, $f_{ik} = f_{jk} f_{ij}$ на $X_{ij} \cap X_{ik}$. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма $S$-схема $X$ с открытыми вложениями $g_i : X_i \to X$ , такими, что $g_i = g_j f_{ij}$ на $X_{ij}$ и $X = \cup_i g_i(X_i)$. (Открытое вложение - это изоморфизм на открытую подсхему.)

**5** Покажите, что $Spec(A \otimes_C B)$ - расслоенное произведение $Spec(A) \times_{Spec(C)} Spec(B)$ в категории схем (а не только аффинных схем: это мы уже выяснили в прошлом семестре, обсуждая тензорное произведение алгебр).

**6** С помощью склейки схем покажите, что расслоенное произведение $X \times_S Y$ существует, когда $Y, S$ аффинны, затем - то же самое, когда аффинна только $S$. Указание: если $X \times_S Y$ существует и $U \subset X$ открыто, проверьте, что $p^{-1}(U)$ – расслоенное произведение $U \times_S Y$; используйте этот факт для того, чтобы склеить расслоенное произведение из аффинных кусков.

**7** Разберите общий случай.

**8** Покажите, что $Proj(A[x_0, \ldots, x_n]) \cong \mathbb{P}^n \times_{\mathbb{Z}} Spec(A)$, и что если $A$ является $k$-алгеброй, то $Proj(A[x_0, \ldots, x_n]) \cong \mathbb{P}^n_k \times_k Spec(A)$ (в общем случае для $S$-схем $X, Y$ и $Y$-схемы $Z$ верно, что $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$).

**9** Представьте $\mathbb{P}^n_A \times_{Spec(A)} \mathbb{P}^m_A$ как $Proj(R)$ и вложите его в проективное пространство над $A$ как замкнутую подсхему.

**10** Пусть $I \subset A$ - идеал. Определим градуированное кольцо $R = \oplus_{d \geq 0} I^d$, где $I^0 = A$. Раздутие спектра $A$ в $I$ - это $Proj(R)$. Проверьте, что если $A = k[X_0, X_1]$, $I = (X_0, X_1)$, то получается то самое раздутие плоскости в точке, которое упоминалось на лекции. Покажите, что проекция $p : Proj(R) \to Spec(A)$ - изоморфизм вне $V(I)$.

**11** Что получится, если в определении $Proj(k[X_0, X_1, X_2])$ приписать переменной $X_0$ степень 2 вместо единицы?

Следующие задачи относятся к темам семинаров, все происходит над алгебраически замкнутым полем:

**12** Покажите, что через 3 попарно не пересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$ проходит единственная квадрика. Сколько прямых пересекает 4 попарно не пересекающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$?

**13** Опишите все прямые на кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$, заданной в аффинной карте уравнением $xyz = 1$.

**14** Пучок прямых в $\mathbb{P}^3$ – это одномерное семейство прямых в $\mathbb{P}^3$, параметризованное прямой $\mathbb{P}^1$ на квадрике Плюккера (грассманиане (2,4)). Покажите, что для любого пучка прямых существует такая точка $O$ и плоскость $P$ в $\mathbb{P}^3$, что прямые пучка - это в точности прямые, лежащие в $P$ и проходящие через $O$.

**15** Опишите поверхность в $\mathbb{P}^3$, заметаемую касательными прямыми к скрученной кубике.