Листок 3. 25 февраля 2013

Задача 1. Обозначим через π естественную проекцию $J^1(M) \to M$. Для точки a пространства 1-струй функций на многообразии рассмотрим 1-струйное расширение $j^1 f$ функции f, такой что $j^1 f(\pi(a)) = a$. Касательное пространство к $j^1 f$ в точке a обозначим через $L_f(\pi(a))$. Докажите, что замыкание объединения всех таких касательных пространств совпадает с контактной плоскостью в точке a.

Задача 2. Рассмотрим симплектическое векторное пространство с симплектической структурой ω. Будем отождествлять с помощью параллельного переноса касательные векторы с векторами пространства. Докажите, что ограничение дифференциальной 1-формы $\alpha(v)(.) = \omega(v, .)$ на а) на не проходящую через ноль гиперплоскость б) (какую-нибудь) стандартную сферу с центром в нуле в этом пространстве является контактной формой.

Задача 3. Докажите, на проективизация кокасательного расслоения к гладкому многообразию правило – проекция вектора скорости контактного элемента принадлежит этому элементу – определяет контактную структуру на проективизации кокасательного расслоения.

Задача 4. Найдите поле характеристических направлений на поверхности уровня функции F, $F\colon J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Задача 5. Назовем максимально неинтегрируемым полем гиперплоскостей на четномерном многообразии такое поле гиперплоскостей, что для 1-формы α, (локально) задающей его, ядро ограничения $d\alpha$ на гиперплоскость поля одномерно. Докажите, что максимальная размерность интегрального многообразия у такого поля гиперплоскостей равна половине размерности многообразия.

Задача 6. Назовем поле касательных гиперплоскостей индуцированным, если 1-форма, задающая это поле является прообразом 1-формы при гладком отображении. Докажите, что а) максимально неинтегрируемое поле гиперплоскостей на четномерном многообразии локально индуцировано из контактной структуры многообразия на единицу меньшей размерности б) интегральные многообразия максимальной размерности для этого поля (локально) совпадают с прообразами лежандровых многообразий при отображении из предыдущего пункта.