Листок 3. 11 февраля 2013

Задача 1. Пусть $s(\alpha)$ – сечение кокасательного расслоения на L, соответствующее 1-форме $\alpha \in \Omega^1(L)$ (значение сечения $s(\alpha)$ в точке $q \in L$ равно $\alpha(q)$, такое сечение называется графиком 1-формы).

а) Докажите, что многообразие $s(\alpha)$ лагранжево, если и только если $d\alpha = 0$;

б) Для двух замкнутых 1-форм α, β на L построить симплектический диффеоморфизм $g\colon T^*L \to T^*L$, такой что $g(s(\alpha))$ Единственен ли такой симплектоморфизм?

Задача 2. Пусть лагранжево подмногообразие лежит в гладкой гиперповерхности в симплектическом многообразии. Доказать, что поле характеристических направлений этой гиперповерхности касается этого лагранжева многообразия.

Задача 3. Рассмотрим симплектическую структуру $f(p,q)dp \wedge dq$ на плоскости с координатами (p,q). Вычислите в этих координатах гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H.

Задача 4. Рассмотрим гиперповерхность Γ в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ ($\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$), заданную уравнением $\sum p_i^2 = 1$.
а) Найдите характеристики этой гиперповерхности.
б) Докажите, что многообразие характеристик симплектоморфно T^*S^{n-1}.

Задача 5. Рассмотрим гиперповерхность Γ в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ ($\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$), заданную уравнением $\sum p_i^2 + q_i^2 = c$ ($c > 0$).
а) Найдите характеристики этой гиперповерхности.
б) Докажите, что многообразие характеристик диффеоморфно $\mathbb{C}P^{n-1}$.
в) Выпишите, при $n = 2$, симплектическую структуру ω_c в какой-нибудь стандартной карте на $\mathbb{C}P^1$ и найдите площадь (интеграл от ω_c) по этой проективной прямой.
г)* Проделайте это же для карты и объема (интеграла от ω_c^{n-1}) пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$.