

### ЛИСТОК 3. МЕТОД ФУРЬЕ

УРЧП, 3-4 КУРС, 27.02.2013

**3◊1** Решите задачу Штурма-Лиувилля

$$y'' - \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0.$$

**3◊2** Решите смешанную начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(4, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 16 - x^2. \end{cases}$$

**3◊3** Решите смешанную начально-краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, & 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, u_x(5, t) = \sin(\omega t), \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

**3◊4** Решите методом Фурье следующую краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

**3◊5** Найдите гармоническую функцию внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат, если на границе круга задано краевое условие

$$u|_{x^2+y^2=R^2} = A + Bx.$$

**3◊6** Постройте функцию Грина оператора  $L = -\frac{d^2}{dx^2}$  с граничными условиями  $u(0) = u(l) = 0$

**3◊7** Пусть  $u(x, t)$  – решение в  $[0, 1] \times [0, +\infty]$  смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x^2(1 - x).$$

Найдите  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 [u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)] dx$ .

**3◊8** Пусть  $u(x, t)$  – решение в  $[0, \pi] \times [0, +\infty]$  смешанной задачи

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin^{100} x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Верно ли, что  $|u_t(x, \frac{\pi}{2})| > 100$  на множестве, мера которого больше 1?