Дополнительные главы топологии и геометрии, 2012-2013 учебный год. Листок 3

Топология CW-комплексов

Определение CW-комплексов см., например, в листочке 4 по “Введению в топологию” за прошлый семестр.

1. Докажите, что если $X \supset Y$ — CW-пара, то пространство X/Y хаусдорфово. Выведите отсюда, что оно является CW-комплексом.

Положим

$$B^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 \leq 1\},$$

$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i^2 = 1\}.$$

Заметим, что B^n естественно ориентированно, а значит, и S^{n-1} тоже, по принципу “сначала внешняя нормаль”.

На произведении $X \times Y$ двух CW-комплексов X и Y введем топологию, объявляя множество $Z \subset X \times Y$ замкнутым тогда и только тогда, когда для любых характеристических отображений $\gamma_\alpha : B^m \to X, \delta_\beta : B^n \to Y$ множество $(\gamma_\alpha \times \delta_\beta)^{-1}(Z)$ замкнуто в $B^m \times B^n$. Полученное топологическое пространство обозначим $X \times_W Y$. Заметим, что тождественное отображение $c_{X,Y} : X \times_W Y \to X \times Y$ непрерывно.

Пусть X — топологическое пространство, такое что каждая точка X содержится в некотором компактном подпространстве (например, X хаусдорфово). Тогда компактно порожденная топология на X — это топология, в которой множество замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с любым компактным множеством замкнуто. Полученное топологическое пространство обозначим X_c; в нем, вообще говоря, больше замкнутых множеств, чем было в X. Если тождественное отображение $X_c \to X$ — гомеоморфизм, то X называется *компактно порожденным.*

2. Докажите, что любое компактное подмножество CW-комплекса содержится в конечном подкомплексе. [Подсказка: вспомните решение задачи 1 б из 4 листка 1 семестра.] Выведите, что для всякий CW-комплекс компактно порожден.

3. Докажите, что если X, Y — CW-комплексы, то тождественное отображение задает гомеоморфизм $X \times_W Y \cong (X \times Y)_c$.

4. Пусть пространство X хаусдорфово и компактно порождено, а Y локально компактно. Докажите, что $(X \times Y)_c \cong X \times Y$. При решении этой задачи можно пользоваться тем, что если Z — какое-то топологическое пространство, то отображение $f : X \times Y \to Z$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_{K \times Y}$ непрерывно для любого компактного $K \subset X$.

5. Обозначим через S множество всех последовательностей целых чисел ≥ 2. Пусть $X = \vee_{s \in S} I_s$ — несчетный, а $Y = \vee_{n \in \mathbb{Z}_{>0}} I_n$ — счетный букет отрезков $I = [0, 1]$, склеенных по 0. Пусть Z — множество точек $\left(\frac{1}{s(n)}, \frac{1}{s(n)})\right) \in I_s \times I_n \subset X \times Y$, где s пробегает S, а n пробегает $\mathbb{Z}_{>0}$. Докажите, что Z замкнуто в $X \times_W Y$, но не в $X \times Y$.

6. Пусть X — CW-комплекс, а Y — стягиваемый CW-подкомплекс. Докажите, что $X \to X/Y$ — гомотопическая эквивалентность.

Примеры клеточных комплексов

7. Пусть для $k = 0, \ldots, n$ отображение $\gamma_{k,\pm} : B^k \to S^n$ задано

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, \pm\sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2}, 0, \ldots, 0).$$

Проверьте, что $\gamma_{k,\pm} : B^k \to S^n$ задают CW-структуру на S^n. Обозначим получающиеся клетки $e_{k,\pm}, k = 0, \ldots, n$. Таким образом, на внутренности каждой клетки $e_{k,\pm}, k < n$ мы получаем 2 ориентации: одна индуцирована $\gamma_{k,\pm}$, а другая приходит из ограничения $\gamma_{k,+}$ на S^{k-1} и стандартной ориентации S^{k-1}. Выясните, когда эти ориентации совпадают, а когда — нет. Пользуясь этим, вычислите клеточный комплекс для $\mathbb{R}P^n$.

8. Постройте клеточное разбиение $\mathbb{C}P^n$.

9. Постройте клеточный комплекс для а) ориентируемой поверхности рода g, склеенной из $4g$-угольника (связная сумма g торов) и б) неориентируемой поверхности рода g, склеенной из $2g$-угольника (связная сумма g копий $\mathbb{R}P^2$, см. рисунок на доске). С помощью этих комплексов вычислите гомологии и сравните результат с тем, который получился при решении задачи из листочка 1.