# Дополнительные главы топологии и геометрии, 2012-2013 учебный год. Листок 4

### Тензорные произведения

В этом листочке буква $A$ обозначает некоторое коммутативное кольцо.

Тензорное произведение $M \otimes_A N$ $A$-модулей $M, N$ — это

$$FreeAb(M \times N) \Bigg/ \left\langle \begin{array}{c} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \\ (am, n) - (m, an) \end{array} \right\rangle_{m, m_1, m_2 \in M, n, n_1, n_2 \in N, a \in A},$$

где $FreeAb(M \times N)$ — свободная абелева группа, натянутая на множество $M \times N$. Образ $(m, n) \in M \times N$ в $M \otimes_A N$ обозначим $m \otimes_A n$. На $M \otimes_A N$ можно ввести структуру $A$-модуля: $a \cdot (m \otimes_A n) = am \otimes_A n = m \otimes_A an$.

**1.** Докажите, что если $M$ и $N$ порождены как $A$-модули элементами $m_i, i \in I$, соответственно, $n_j, j \in J$, то $M \otimes_A N$ порождено как $A$-модуль элементами $m_i \otimes_A n_j, i \in I, j \in J$.

**2.** Докажите, что для любых $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ верно а) $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \cong \mathbb{Z}/(m, n)$, где $(m, n)$ — наибольший общий делитель $m$ и $n$; б) $\mathbb{Z}/n \otimes_{\mathbb{Z}} M = 0$, где $M$ — абелева группа, такая что отображение $M \to M$, заданное $m \mapsto nm, m \in M$, сюръективно.

**3.** Докажите, что для любых $A$-модулей $M, N, K$ имеют место изоморфизмы

$$M \otimes_A (N \otimes_A K) \cong (M \otimes_A N) \otimes_A K,$$

$$M \otimes_A (N \oplus K) \cong (M \otimes_A N) \oplus (M \otimes_A K),$$

$$M \otimes_A N \cong N \otimes_A M,$$

$$A \otimes M \cong M.$$

[Подсказка: задайте отображения в обе стороны на образующих, проверьте, что они пропускаются через соотношения и взаимно обратны по модулю оных.]

**4.** Докажите, что для любых $A$-модулей $M, N, K$ имеют место изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A N, K) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_A(N, K)).$$

[Подсказка: пусть $f : M \otimes_A N \to K$. Построим $F(f) : M \to \mathrm{Hom}_A(N, K)$ по формуле $F(f)(m)(n) = f(m \otimes_A n)$; проверьте, что для любого $m \in M$ отображение $n \mapsto F(f)(m)(n)$ есть отображение $A$-модулей $N \to K$; проверьте, что оно $A$-линейно зависит от $m$ при фиксированном $f$ и, наконец, что получившаяся стрелка слева направо $A$-линейна по $f$. Аналогично постройте обратное отображение.]

С помощью задач 2 и 3 мы можем вычислить тензорное произведение над $\mathbb{Z}$ любых двух групп, которые нам встретятся на практике. Задача 4 говорит нам, что функтор $- \otimes_A N$ сопряжен слева к функтору $\mathrm{Hom}_A(N, -)$.

### Точные последовательности и функторы

Здесь мы будем рассматривать только функторы из $A$-модулей в $A$-модули. Ковариантный функтор $F$ *точен слева*, если для любой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ последовательность $0 \to F(M') \to F(M) \to F(M'')$ точна, и *точен справа*, если для любой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ последовательность $F(M') \to F(M) \to F(M'') \to 0$ точна. Аналогично, контравариантный функтор $F$ *точен слева*, если для любой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ последовательность $0 \to F(M'') \to F(M) \to F(M')$ точна, и *точен справа*, если для любой точной последовательности $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ последовательность

$F(M'') \to F(M) \to F(M') \to 0$ точна. Функтор (ковариантный или контравариантный) *точен*, если он точен справа и слева.

**5.** Докажите, что $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ точен слева и точен, если $M$ — свободный модуль или, более общо, прямое слагаемое свободного модуля.

Модули $M$, такие что $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ точен, называются *проективными*. Можно доказать, что проективные модули — это в точности прямые слагаемые свободных модулей. В частности, если $A = \mathbb{Z}$, то модуль проективен тогда и только тогда, когда он свободен. Заметим, что каждый модуль есть фактор проективного (например, свободного).

**6.** Докажите, что $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ точен слева и (*) точен, если $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Модули $M$, такие что $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ точен, называются *инъективными*. Можно доказать, что если $A = \mathbb{Z}$, то модуль инъективен тогда и только тогда, когда он есть прямая сумма модулей вида $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Можно также доказать, что для любого $A$ любой $A$-модуль есть подмодуль инъективного.

**7.** Докажите, что $M \otimes_A -$ точен справа и точен, если а) $M$ свободен и конечно порожден; б) (*) $M$ просто свободен; в) (*) $A = \mathbb{Z}, M = \mathbb{Q}$.

Модули $M$, такие что $M \otimes_A -$ точен, называются *плоскими*.

На лекциях мы считали Tor'ы, а теперь займемся подсчетом Ext'ов (для случая $A = \mathbb{Z}$).

**8.** Проективно разрешая первый аргумент, вычислите $\mathrm{Ext}(M, N)$, где $M, N$ равны $\mathbb{Z}$ либо $\mathbb{Z}/m$.

**9.** Инъективно разрешая второй аргумент, вычислите $\mathrm{Ext}(M, N)$, где $M = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}/n$, а $N = \mathbb{Z}/m$.

Из всех "классических" групп пока не охвачены в смысле вычисления Ext'ов случаи $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ и $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n)$.

**10.** (*) Докажите, что $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ несчетна и делима, т.е., для любого $m$ умножение на $m$ задает сюръективный эндоморфизм этой группы. Выведите отсюда, что $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ несчетна, а $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}/n) = 0$.

### Универсальные коэффициенты

Пусть $f : X \to Y$ — клеточное отображение CW-комплексов. Как было доказано на лекциях, существуют изоморфизмы $H_*(X) \to H_*(\mathcal{C}_*(X)), H_*(Y) \to H_*(\mathcal{C}_*(Y))$, где $\mathcal{C}_*(-)$ обозначает комплекс клеточных цепей, замыкающие коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_*(X) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\mathcal{C}_*(X)) & \xrightarrow{f_*} & H_*(\mathcal{C}_*(Y)) \end{array}$$

Модифицируя это рассуждение, несложно доказать, что для любой абелевой группы $M$ есть изоморфизмы

$$H_*(X, M) \to H_*(\mathcal{C}_*(X) \otimes M), H_*(Y, M) \to H_*(\mathcal{C}_*(Y) \otimes M)$$

и

$$H^*(X, M) \to H_*(\mathrm{Hom}\, \mathcal{C}_*(X), M), H^*(Y, M) \to H_*(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_*(Y), M),$$

замыкающие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H_*(X, M) & \xrightarrow{f_*} & H_*(Y, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\mathcal{C}_*(X) \otimes M) & \xrightarrow{f_*} & H_*(\mathcal{C}_*(Y) \otimes M) \end{array}$$

и

$$\begin{array}{ccc} H^*(X, M) & \xleftarrow{f^*} & H^*(Y, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_*(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_*(X), M)) & \xleftarrow{f^*} & H_*(\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_*(Y), M)) \end{array}$$

**11.** Пусть $X = S^n, Y = X \cup_f B^{n+1}$, где $f : \partial B^{n+1} \to S^n = X$ — отображение степени $m$, а $Z = Y/X$.

а) Докажите, что $Z$ гомеоморфно $S^{n+1}$.

б) Пусть $X$ разбито на 2 клетки, 0-мерную и $n$-мерную. Отсюда получаем клеточное разбиение $Y$ на 3 клетки размерностей $0, n, n+1$. Вычислите клеточные цепные комплексы $X, Y, Z$ и их отображения, индуцированные вложением $i : X \to Y$ и проекцией $p : Y \to Z$.

в) Докажите, что $p$ индицурует нулевое отображение $H_{n+1}(-, \mathbb{Z})$, но не $H_{n+1}(-, \mathbb{Z}/m)$ и не $H^{n+1}(-, \mathbb{Z}/m)$. Аналогично докажите, что $i$ индицурует нулевое отображение $H^n(-, \mathbb{Z})$, но не $H^n(-, \mathbb{Z}/m)$ и не $H_n(-, \mathbb{Z}/m)$. Выведите отсюда, что расщепления в формулах универсальных коэффициентов неестественные.