ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТОПОЛОГИИ

ЛИСТОК 1 (ВЕРСИЯ 2): СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Весна 2013 года

Задача 1. Пусть $0 = F_{-1}G \subset F_0G \subset F_1G \subset \cdots \subset F_{n-1}G \subset F_nG = G$ — конечная фильтрация на абелевой группе G. Предположим, что факторгруппы $F_iG/F_{i-1}G$, $i = 0, \ldots, n$ свободны. Верно ли, что группа G свободна?

Задача 2. а) Классифицируйте все конечномерные фильтрованные комплексы вещественных векторных пространств (F_jC_i), где $F_{j-1}C_i \subset F_jC_i \subset C_i$, $\partial\colon C_i \longrightarrow C_{i-1}$, $\partial(F_jC_i) \subset F_jC_{i-1}$, $F_{-1}C_\bullet = 0$, $F_nC_\bullet = C_\bullet$, $C_i = 0$ при $i < 0$ и $i > N$, C_i конечномерны при всех i. Перечислите все такие фильтрованные комплексы, которые нельзя разложить в прямую сумму двух других ненулевых фильтрованных комплексов, и представьте произвольный фильтрованный комплекс виде прямой суммы неразложимых.

б) Вычислите спектральные последовательности фильтрованных комплексов, которые у вас получились.

Бикомплекс — это набор абелевых групп $C_{i,j}$, занумерованных двумя индексами i, $j \in \mathbb{Z}$, и снабженных двумя дифференциалами $\partial\colon C_{i,j} \longrightarrow C_{i-1,j}$, $\delta\colon C_{i,j} \longrightarrow C_{i,j-1}$, такими что $\partial^2 = 0 = \delta^2$ и $\partial\delta + \delta\partial = 0$. Предполагая, что $C_{i,j} = 0$, когда $i < 0$ или $j < 0$, определим *тотальный комплекс* $C_\bullet$ бикомплекса $C_{i,j}$ правилом $C_n = \bigoplus_{i+j=n} C_{i,j}$; дифференциал в комплексе $C_\bullet$ определим правилом $d = \partial + \delta$. Комплекс $C_\bullet$ снабжается двумя естественными фильтрациями ${}'F_pC_n = \bigoplus_{i+j=n}^{i\leqslant p} C_{i,j}$ и ${}''F_pC_n = \bigoplus_{i+j=n}^{j\leqslant p} C_{i,j}$. *Спектральные последовательности* бикомплекса $C_{i,j}$ — это две спектральные последовательности ${}'E^r_{p,q}$ и ${}''E^r_{p,q}$, связанные с двумя фильтрациями ${}'F$ и ${}''F$ на тотальном комплексе $C_\bullet$.

Задача 3. Вычислите страницы ${}'E^2_{p,q}$ и ${}''E^2_{p,q}$ спектральных последовательностей ${}'E^r_{p,q}$ и ${}''E^r_{p,q}$ произвольного бикомплекса абелевых групп $C_{i,j}$.

Задача 4. Классифицируйте все конечномерные бикомплексы вещественных векторных пространств $C_{i,j}$, где $C_{i,j} = 0$ когда $i < 0$ или $j < 0$, или $i > N$, или $j > N$, и пространства $C_{i,j}$ конечномерны при всех i, j

а) при дополнительном предположении, что $\dim C_{i,j} \leqslant 1$ для всех i, j;

б) в общем случае.

в) Вычислите спектральные последовательности бикомплексов, которые у вас получились.

Задача 5. Рассмотрим два расслоения над S^2 со слоем S^1: тривиальное и связанное с действием $SO(3)$ на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

а) Изоморфны ли спектральные последовательности (когомологические, с коэффициентами $\mathbb{Z}/2$, с учетом мультипликативной структуры) у этих двух расслоений?

б) Изоморфны ли кольца когомологий (с коэффициентами $\mathbb{Z}/2$) у тотальных пространств этих двух расслоений?

Задача 6. а) Дайте определение послойной надстройки над расслоением. Рассмотрим два расслоения над S^2 со слоем S^2: тривиальное и послойную надстройку над расслоением Хопфа $S^2 \longrightarrow S^2$.

б) Изоморфны ли спектральные последовательности (когомологические, с целыми коэффициентами, с учетом мультипликативной структуры) у этих двух расслоений?

б) Изоморфны ли кольца когомологий (с целыми коэффициентами) у тотальных пространств этих двух расслоений?

Задача 7. Пользуясь спектральными последовательностями расслоений $SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$, связанных с действием $SU(n)$ на $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, вычислите кольца когомологий $H^*(SU(n), \mathbb{Z})$ для всех n.

Задача 8. Пусть $V(n,k)$ — многообразия Штифеля ортонормированных наборов из k (упорядоченных) векторов в $\mathbb{R}^n$.

а) Постройте расслоения $SO(n) \longrightarrow V(n,2)$ со слоем $SO(n-2)$ и $V(n,2) \longrightarrow S^{n-1}$ со слоем S^{n-2}.

б) Вычислите кольца когомологий $H^*(SO(m), \mathbb{Q})$ для нечетных m.

в) Вычислите кольца когомологий $H^*(SO(m), \mathbb{Q})$ для всех m.

Задача 9. Вычислите группы когомологий $H^*(SO(n), \mathbb{Z}/2)$ для всех n.

Задача 10. Пусть $X \longrightarrow S^n$ — отображение в n-мерную сферу, $n \geqslant 2$, из стягиваемого пространства X (“обобщенное расслоение”), для которого имеет место мультипликативная когомологическая спектральная последовательность со слоем F. Вычислите кольцо когомологий $H^*(F, \mathbb{Q})$.

Задача 11. Пусть $V(n,\infty)$ и $\mathbb{C}V(n,\infty)$ — многообразия Штифеля ортонормированных наборов из n (упорядоченных) векторов в $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{N=1}^\infty \mathbb{R}^N$ и $\mathbb{C}^\infty = \bigcup_{N=1}^\infty \mathbb{C}^N$, а $G_{\mathbb{C}}(n,\infty)$ и $G_{\mathbb{R}}^+(n,\infty)$ — многообразия Грассмана n-мерных комплексных/ориентированных вещественных векторных подпространств в $\mathbb{C}^\infty$ и $\mathbb{R}^\infty$.

а) Пользуясь когомологической спектральной последовательностью универсального расслоения $\mathbb{C}V(n,\infty) \longrightarrow G_{\mathbb{C}}(n,\infty)$ со слоем $U(n)$ и результатом задачи 7, вычислите кольцо когомологий $H^*(G_{\mathbb{C}}(n,\infty), \mathbb{Z})$. Вычислите также саму эту спектральную последовательность (с целыми коэффициентами).

б) Пользуясь когомологической спектральной последовательностью универсального расслоения $V(n,\infty) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}^+(n,\infty)$ со слоем $SO(n)$ и результатом задачи 8, вычислите кольцо когомологий $H^*(G_{\mathbb{R}}^+(n,\infty), \mathbb{Q})$. Вычислите также саму эту спектральную последовательность (с рациональными коэффициентами).

в) Пользуясь когомологической спектральной последовательностью универсального расслоения $V(n,\infty) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}^+(n,\infty)$ со слоем $SO(n)$, вычислите кольцо когомологий $H^*(G_{\mathbb{R}}^+(n,\infty), \mathbb{Z}/2)$ для $n=2$ и 3. Вычислите также саму эту спектральную последовательность (с теми же коэффициентами и для тех же значений n).