Дополнительные главы топологии и геометрии, 2012-2013 учебный год. Листок 1

Гомологии

Пара топологических пространств (X, X') – это некоторое пространство X и его подпространство X'. *Отображение пар* $f\colon (X, X') \to (Y, Y')$ — это непрерывное отображение $f\colon X \to Y$, такое что $f(X') \subset Y'$. Для каждой пары (X, X') существует длинная точная последовательность

$$\cdots \to H_i(X') \to H_i(X) \to H_i(X, X') \to H_{i-1}(X') \to \cdots ,$$

естественная по отображениям пар. Если X — CW-комплекс, а X' — его подкомплекс, то $H_i(X, X') \cong H_i(X/X')$ при $i \neq 0$.

Функториальность: Всякое непрерывное отображение пар $f\colon (X, X') \to (Y, Y')$ индуцирует отображение $f_*\colon H_i(X, X') \to H_i(Y, Y')$. Если $g\colon (Y, Y') \to (Z, Z')$ — другое непрерывное отображение пар, то $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

Гомотопия: Если непрерывные отображения $f, g\colon X \to Y$ гомотопны, то $f_* = g_*$.

Вырезание: Если (X, X') — пара топологических пространств, а $Y \subset X$ — такое подпространство, что $\bar{Y} \subset Int(X')$, то естественные отображения $H_i(X \setminus Y, X' \setminus Y) \to H_i(X, X')$ — изоморфизмы.

Из этих свойств можно вывести следующее. Пусть X — топологическое пространство, а X', X'' — его подпространства, такие что $X' \cup X'' = X$. Предположим, что X' и X'' открыты в X либо что X — CW-комплекс, а X' и X'' — его подкомплексы. Тогда имеется длинная точная последовательность Майера-Виеториса:

$$\cdots \to H_i(X' \cap X'') \to H_i(X') \oplus H_i(X'') \to H_i(X) \to H_{i-1}(X' \cap X'') \to \cdots ,$$

в которой $H_i(X' \cap X'') \to H_i(X') \oplus H_i(X'')$ — сумма, а следуюшая за ней стрелка — разность отображений, индуцированных вложениями.

Пусть задано еще одно пространство Y и его подпространства Y', Y'' с вышеприведенными свойствами. Последовательность Майера-Виеториса функториальна относительно отображений $f\colon X \to Y$, таких что $f(X') \subset Y', f(X'') \subset Y''$.

Пусть M – гладкое ориентированное n-мерное многообразие. Тогда $H_n(M) \cong \mathbb{Z}$, причем у этой группы имеется каноническая образующая $[M]$, которая называется *фундаментальным классом* M. Если $i : N \to M$ – вложение ориентированного подмногообразия N в M, то класс $i_*([N]) \in H_{\dim N}(M)$ называется *классом, представленным* N.

1. С помощью последовательностей пары, Майера-Виеториса (или еще как-нибудь, но не используя клеточные цепи) посчитайте целочисленные гомологии и гомологии по модулю 2 следующих пространств, а также отображения гомологий, индуцированные следующими отображениями (там, где они даны).

a. Сфера $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$ и отображения f, g, где $f\colon S^n \to S^n$ — отражение относительно плоскости, проходящей через 0, а $g\colon S^n \to S^n$ — антиподальное отображение.

b. Тор $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

c. Комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$.

d. Вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{R}^*$ и отображение $f\colon S^n \to \mathbb{R}P^n$ — стандартное двулистное накрытие.

e. Компактная ориентируемая поверхность рода g с k компонентами границы.

f. Компактная неориентируемая поверхность рода g с k компонентами границы.

2. Докажите, что при $m \neq n$ никакое непустое открытое подмножество $\mathbb{R}^m$ не гомеоморфно никакому открытому подмножеству $\mathbb{R}^n$.

3. Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого единичного шара в $\mathbb{R}^n$ в себя имеет неподвижную точку.

4. В этой задаче можно предполагать, что если отображение $f\colon \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^m$ индуцирует ненулевое отображение $H_1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \to H_1(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2)$, то оно индуцирует изоморфизмы $H_i(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2) \to H_i(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}/2)$ при всех $i \leq n$. Мы это потом докажем с помощью умножения в когомологиях.

a. **Теорема Борсука-Улама.** Пусть $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ — нечетное отображение. Докажите, что найдется точка $x \in S^n$, такая что $f(x) = 0$.

b. Докажите, что не существует подмножества $\mathbb{R}^n$, гомеоморфного S^n. Выведите отсюда, что не существует непрерывного инъективного отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $m > n$. (*) А есть ли непрерывные сюръективные отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $m < n$?

c. Докажите, что степень отображения $S^n \to S^n$ без неподвижных точек равна $(-1)^{n+1}$.

d. Докажите, что $\mathbb{Z}/2$ — единственная группа, которая может свободно действовать на S^n, если n четно. Верно ли это для какого-нибудь нечетного n?

e. Докажите, что степень четного отображения $S^n \to S^n$ четна и равна 0, если n четно.

f. Докажите, что для любого векторного поля на сфере найдутся две противоположные точки, в которых векторы поля противоположны.

g. Докажите, что степень нечетного отображения $S^n \to S^n$ нечетна.