Дополнительные главы топологии и геометрии, 2012-2013 учебный год. Листок 2

Сингулярные гомологии

Положим

$$\triangle^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \text{все } x_i \geq 0, \Sigma x_i = 1\}.$$

Сингулярный n-симплекс топологического пространства X — это непрерывное отображение $\triangle^n \to X$. Множество линейных комбинаций $\Sigma_\sigma a_\sigma \sigma$, в которых суммирование идет по всем сингулярным n-симплексам $\sigma : \triangle^n \to X$, $a_\sigma \in \mathbb{Z}$ и лишь конечное число $a_\sigma \neq 0$, называется *группой (целочисленных) сингуглярных n-цепей* X и обозначается $C_n(X)$.

Пусть $0 \leq i_0, \dots, i_k \leq n$, а $\sigma : \triangle^n \to X$ — сингулярный n-симплекс. Тогда положим $\sigma(i_0, \dots, i_k) = \sigma \circ h$, где $h : \triangle^k \to \triangle^n$ — линейное отображение, переводящее j-ю вершину $\triangle^k$ в i_j-ю вершину $\triangle^n$. Для $\sigma \in C_n(X)$ положим

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma(0, \dots, \hat{\imath}, \dots, n) \in C_{n-1}(X).$$

1. Пусть $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1$, а $\sigma : \triangle^n \to X$ — сингулярный n-симплекс. Докажите, что

$$(\sigma(0, \dots, \hat{\imath}, \dots, n))(0, \dots, \hat{\jmath}, \dots, n-1) = \begin{cases} \sigma(0, \dots, \hat{\jmath}, \dots, \hat{\imath}, \dots, n), \text{ если } j < i \\ \sigma(0, \dots, \hat{\imath}, \dots, \widehat{j+1}, \dots, n), \text{ если } j \geq i. \end{cases}$$

Пользуясь этим, проверьте, что $\partial \circ \partial = 0$.

2. Пусть $I = [0, 1]$. Обозначим вершины нижнего основания $\triangle^n \times \{0\}$ призмы $\triangle^n \times I$ через $v_0, \dots, v_n$, а верхнего основания $\triangle^n \times \{1\}$ – через $w_0, \dots, w_n$. Напомним, что если $\eta : \triangle^n \times I \to X$ — непрерывное отображение из призмы в топологическое пространство X, а $u_0, \dots, u_k$ — упорядоченный набор вершин призмы, то $\eta(u_0, \dots, u_k)$ — это композиция $\eta \circ h$, где $h : \triangle^k \to \triangle^n \times I$ — линейное отображение, переводящее i-ю вершину $\triangle^k$ в u_i.

а) Проверьте, что $\partial\eta(u_0, \dots, u_k) = \sum_i (-1)^i \eta(u_0, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k)$.

б) Пусть $\sigma : \triangle^n \to X$ — сингулярный симплекс. Проверьте, что при $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n$

$$\left(\sigma(0, \dots, \hat{\jmath}, \dots, n) \times id_I\right)(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_{n-1}) =$$
$$= \sigma \times id_I \begin{cases} (v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{i+1}, w_{i+1}, \dots, w_n), \text{ если } j \leq i \\ (v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w_j}, \dots, w_n), \text{ если } j > i \end{cases}$$

б) Пользуясь пунктами а) и б), проверьте, что если $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения, гомотопные посредством $F : X \times I \to Y$ (т.е., $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ для каждого $x \in X$), то $g_\# - f_\# = \partial D - D\partial$, где $f_\#, g_\# : C_*(X) \to C_*(Y)$ — индуцированные отображения комплексов сингулярных цепей, а $D : C_*(X) \to C_{*+1}(Y)$ определяется на $\sigma \in C_n(X)$ так:

$$D\sigma = \sum_i (-1)^i \left(F \circ (\sigma \times id_I)\right)(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots w_n).$$

3. Пусть $\partial\triangle^n$ — объединение $n-1$-граней стандартного n-симплекса. Определим отображение $c : C_*(\partial\triangle^n) \to C_{*+1}(\triangle^n)$ так: для сингулярного симплекса $\alpha : \triangle^k \to \partial\triangle^n$ положим

$$c\alpha(t_0, \dots, t_{k+1}) = t_0 C + (1 - t_0)\alpha(t_1, \dots, t_{k+1}),$$

где $(t_0, \dots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+2}$, а $C = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ — барицентр $\triangle^n$, а дальше продолжим по линейности. Докажите, что

$$\partial(c\alpha) = \alpha - c(\partial\alpha).$$

Гомологическая алгебра

4: Связывающий гомоморфизм. Пусть $0 \to C'_* \to C \to C''_* \to 0$ — точная тройка цепных комплексов с дифференциалами $\partial', \partial, \partial''$. Возьмем класс $[c''] \in H_i(C''_*)$, представленный циклом $c'' \in C''_i$. Цикл c'' есть образ некоторого $c \in C_i$, причем образ ∂c в C''_{i-1} равен 0 в силу $\partial'' c'' = 0$. Значит, ∂c есть образ некоторого $c' \in C'_{i-1}$.

а) Проверьте, что $\partial' c' = 0$.

б) Проверьте, что если c' построено по $[c'']$ с помощью такой процедуры, то отображение $\partial : H_i(C''_*) \to H_{i-1}(C'_*)$, определенное как $[c''] \mapsto [c']$, корректно определено, т.е., что если цепь $\tilde{c} \in C_i$ переходит в цикл $\tilde{c}'' \in C''_i$, такой что $[\tilde{c}''] = [c'']$, то для цикла $\tilde{c}' \in C'_{i-1}$, переходящего в $\partial\tilde{c}$ имеем $[c'] = [\tilde{c}']$.

в) Проверьте, что только что построенное отображение $\partial : H_i(C''_*) \to H_{i-1}(C'_*)$ является гомоморфизмом групп.

г) Проверьте, что последовательность

$$\cdots \to H_i(C'_*) \to H_i(C_*) \to H_i(C''_*) \xrightarrow{\partial} H_{i-1}(C'_*) \to \cdots,$$

в которой стрелки $H_i(C'_*) \to H_i(C_*)$ и $H_i(C_*) \to H_i(C''_*)$ индуцированы отображениями комплексов, а ∂ — только что построенное отображение, точна.

При решении этой задачи полезно иметь перед глазами такую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & C''_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_i \arrow[r] \arrow[d] & C_i \arrow[r] \arrow[d] & C''_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & C''_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{i-2} \arrow[r] & C_{i-2} \arrow[r] & C''_{i-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

5: 5-лемма Пусть имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "j"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E',
\end{tikzcd}$$

в которой строки точны, g, i — изоморфизмы, f — сюръекция, а j — инъекция. Докажите, что h — изоморфизм.

6: эйлерова характеристика Пусть

$$C_* = (0 \to C_n \to C_{n-1} \to \cdots \to C_m \to 0)$$

— конечный комплекс конечнопорожденных абелевых групп или конечномерных векторных пространств над полем. Докажите, что

$$\sum_i (-1)^i \dim C_i = \sum_i (-1)^i \dim H_i(C_*),$$

где размерность конечнопорожденной абелевой группы понимается как ранг ее фактора по кручению.