1. Торсоры

(1) Пусть G – группа, M – группа с левым действием группы G. *Главным однородным пространством* (или *G-торсором*) над M называется G-множество T со свободным и транзитивным правым G-действием $T \times M \longrightarrow T$.

Проверьте, что в следующих примерах T является G-торсором над M:

(i) (тривиальный торсор) G и M – произвольные, а $T = M$;

(ii) T – аффинное пространство, G – некоторая группа аффинных преобразований, M – группа сдвигов T;

(iii) G – некоторая группа автоморфизмов алгебраически замкнутого поля K, M – группа корней из единицы степени m в K, T – множество всех корней степени m в K из некоторого ненулевого элемента неподвижного поля $k := K^G$.

(iv) G – некоторая группа автоморфизмов алгебраически замкнутого поля K, M – группа всех корней из единицы в K, T – множество всех корней всех степеней в K из некоторого ненулевого элемента неподвижного поля $k := K^G$.

(2) Определите изоморфизм G-торсоров над M. Докажите, G-торсор над A изоморфен A (тривиален) тогда и только тогда, когда имеет точку, неподвижную относительно G.

(3) Каждому G-торсору T над M с отмеченной точкой $t \in T$ сопоставим отображение $f_{T,t} : G \longrightarrow M$, $g \mapsto \varphi_g$, $gt = t \cdot \varphi_g$ (групповой закон M записывается мультипликативно). Докажите, что (i) $\varphi_{gh} = \varphi_g \cdot g\varphi_h$; (ii) это сопоставление отождествляет множество классов изоморфизма G-торсоров над M с отмеченной точкой с множеством 1-коциклов на G со значениями в M (которое обозначается через $Z^1(G, M)$), т.е. таких отображений $\varphi : G \longrightarrow M$, что $\varphi(gh) = \varphi(g) \cdot g\varphi(h)$.[1]

(4) Отождествите множество классов изоморфизма G-торсоров над M (которое обозначается через $H^1(G, M)$) с множеством классов эквивалентных отображений $\varphi \in Z^1(G, M)$: $\varphi \sim \varphi'$, если $\varphi'(g) = m^{-1} \cdot \varphi_g \cdot gm$ для некоторого $m \in M$.[2]

(5) Пусть T, T' – два G-торсора над M. Группа $M \times M$ действует на $T \times T'$, а значит, и подгруппа $M_- = \{(m, m^{-1}) \mid m \in M\} \subseteq M \times M$ действует на $T \times T'$. Определим $T + T'$ как множество орбит группы M_- на $T \times T'$. Предположим, что группа M коммутативна. Докажите, что $T + T'$ имеет естественную структуру G-торсора над M, а операция $+$ определяет структуру абелевой группы на $H^1(G, M)$.

Чему соответствует сложение торсоров в примерах п. (1)?

(6) Пусть M, M' – две G-группы. Постройте естественную биекцию $H^1(G, M \times M') \xrightarrow{\sim} H^1(G, M) \times H^1(G, M')$, которая является изоморфизмом групп, если M, M' коммутативны.

(7) Пусть G – некоторая группа автоморфизмов поля K. Покажите, что $H^1(G, \mathrm{GL}_n K)$ параметризует классы изоморфизма n-мерных полулинейных представлений группы G над полем K (т.е. левых модулей над скрученным групповым кольцом $K\langle G\rangle$,[3] которые n-мерны как K-векторные пространства).

Докажите, что если G конечна, то (i) (теорема 90 Гильберта) все n-мерные полулинейные представления группы G над полем K изоморфны; (ii) $H^1(G, 1 + XK[[X]]) = \{1\}$;[4] (iii) $H^1(G, \mathrm{SL}_n K) = \{*\}$.

---

[1] Например, если действие группы G на M тривиально, то $Z^1(G, M) = \mathrm{Hom}(G, M)$.

[2] Например, если действие группы G на M тривиально, то $H^1(G, M)$ – множество классов сопряжённости гомоморфизмов $G \to M$.

[3] Напомним, что аддитивная группа кольца $K\langle G\rangle$ определяется как K-векторное пространство с базисом, отождествлённым с группой G. Другими словами, элементы $K\langle G\rangle$ – это формальные суммы $\sum_{g \in G} a_g[g]$, где все $a_g \in K$ равны нулю, кроме конечного их числа, а сложение определяется покомпонентно: $(\sum_{g \in G} a_g[g]) + (\sum_{g \in G} a'_g[g]) = \sum_{g \in G}(a_g + a'_g)[g]$. Умножение на базисе определяется умножением группы G, а затем продолжается по дистрибутивности и полулинейности: $(\sum_{g \in G} a_g[g])(\sum_{g \in G} a'_g[g]) = \sum_{g \in G}(\sum_{h \in G} a_h \cdot h a'_{h^{-1}g})[g]$. Обсуждалось, что действие поля K на себе умножениями слева и естественное действие группы G на поле K задают гомоморфизм колец $K\langle G\rangle \to \mathrm{End}_{K^G}(K)$, который инъективен (а его образ плотен).

[4] Воспользуйтесь теоремой 90 Гильберта $H^1(G, K^\times) = H^1(G, K((T))^\times) = \{1\}$ и разложением $K((T))^\times = (1 + XK[[X]]) \times K^\times \times T^{\mathbb{Z}}$.

(8) Пусть $\lambda : M \to N$ – G-гомоморфизм в некоторую G-группу N с ядром Q. Постройте естественное отображение $H^1(G, M) \to H^1(G, N)$.

Предположим, что действие группы G на Q тривиально, а любой G-торсор над M тривиален. Постройте естественное вложение (групп, если группа Q абелева) $\mathrm{Hom}(G, Q)$ в $N^G/\lambda(M^G)$. Покажите, что это вложение биективно, если λ сюръективен.