Список литературы

[1] C.Curtis, I.Rainer, Representation theory of finite groups and associative algebras.
[2] И.Херстейн Некоммутативные кольца
[3] N.Jacobson, **Lectures in abstract algebra**
[4] С.Ленг, **Алгебра.**

Предполагается, что все знакомы с понятием группы и ассоциативного кольца. Далее везде A обозначает ассоциативное кольцо, причём с единицей, если противное не оговорено явно.

1. Модули

Пусть G – некоторая группа.

(1) *Действием группы G на множестве S*, или структурой *G-множества* на S, называется ассоциативное отображение $G \times S \to S$, $(gg')m = g(g'm)$ для всех $g, g' \in G$ и $m \in S$.
(2) G-модулем называют коммутативную группу M (с аддитивно записываемой операцией) с действием группы G ($G \times M \to M$, $(g, m) \mapsto gm$), аддитивным по M.
(3) Представлением группы G над полем k называют k-векторное пространство, снабжённое k-линейным действием G.
(4) Левым модулем над кольцом A (левым A-модулем) называют коммутативную группу M (с аддитивно записываемой операцией), на которой определено умножение слева на элементы кольца A, т.е. задано отображение $\varphi : A \times M \to M$, $(a, m) \mapsto am := \varphi(a, m)$, которое аддитивно по A и по M, а также ассоциативно: $(aa')m = a(a'm)$ для всех $a, a' \in A$ и $m \in M$. Аналогично, правым A-модулем называют коммутативную группу M, на которой определено умножение справа на элементы кольца A, т.е. задано отображение $M \times A \to M$, которое аддитивно по A и по M, а также ассоциативно: $m(aa') = (ma)a'$ для всех $a, a' \in A$ и $m \in M$.
    Если A является k-алгеброй для некоторого поля k (т.е. k содержится в центре A), то левые A-модули называют также представлениями алгебры A.

Обозначение. A-mod – категория левых A-модулей.

Примеры. Абелева группа – это то же самое, что $\mathbb{Z}$-модуль. На занятии обсуждался пример *группового кольца* $\mathbb{Z}[G]$ группы G. Любой G-модуль можно рассматривать как левый $\mathbb{Z}[G]$-модуль; любое представление группы G над полем k можно рассматривать как левый $k[G]$-модуль.

Упражнения.

(1) (а) Объясните, какие категории образуют группы, кольца, множества с действием группы G, G-модули, представления группы G над полем k, левые A-модули. (б) Определите в этих категориях ядра, коядра, произведения, суммы (прямые и внутренние).[1]
(2) Определите бифунктор тензорного произведения $\otimes_A$: mod-$A \times A$-mod $\to Z(A)$-mod, где mod-$A := A\text{-mod}^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}}$-mod – категория правых A-модулей и $Z(A)$ – центр A.
(3) Пусть N – левый A-модуль, M – правый B-модуль, L – левый B-модуль, P – $A \otimes B^{\mathrm{op}}$-модуль ($(A, B)$-бимодуль). Постройте (а) функторы $P \otimes_B (-) : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$, $\mathrm{Hom}_A(-, P) : A\text{-mod}^{\mathrm{op}} \to B^{\mathrm{op}}\text{-mod}$, $\mathrm{Hom}_A(P, -) : A\text{-mod} \to B^{\mathrm{op}}\text{-mod}$, $\mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(-, P)$:

[1] Пусть C – категория. *Уравнителем* пары морфизмов $f, g \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ называется такой морфизм h в X, что $f \circ h = g \circ h$, а любой морфизм h' в X с $f \circ h' = g \circ h'$ пропускается через q. Чтобы определить ядра, в категории C должны быть нулевые морфизмы, т.е. для любой пары объектов должен быть выделен ровно один морфизм между ними, композиции которого (и левая, и правая) с любым другим морфизмом – также выделенный морфизм. Тогда ядро f определяется как уравнитель f и нулевого морфизма, т.е. ядро f – это такой морфизм $q : Q \to X$, что $f \circ q$ – нулевой морфизм из Q в Y, а любой морфизм $q' : Q' \to X$ с нулевой композицией $f \circ q'$ пропускается через q. *Коуравнители* (и *коядра*) определяются обращением стрелок. *Сумма* семейства объектов определяеся как объект, снабжённый морфизмами из всех элементов семейства, универсальный по отношению к этим данным. *Произведение* семейства объектов определяеся как объект, снабжённый морфизмами во все элементы семейства, универсальный по отношению к этим данным.

B^{op}-mod $\to A$-mod; (б) естественные изоморфизмы абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M,P)) \cong \mathrm{Hom}_{B^{\mathrm{op}}}(M, \mathrm{Hom}_A(N,P)) \quad \text{и}$$
$$\mathrm{Hom}_A(P \otimes_B L, N) \cong \mathrm{Hom}_B(L, \mathrm{Hom}_A(P,N)).$$

Пример. Пусть $h : B \to A$ – гомоморфизм колец и $P = A$. Левые A-модули $P \otimes_B L$ и $\mathrm{Hom}_B(P, L)$ называются, соответственно, *коиндуцированным* и *индуцированным* B-модулем L. Заметим, что $\mathrm{Res}^A_B := \mathrm{Hom}_A(P, -) : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ – забывающий функтор: любой A-модуль можно рассматривать как B-модуль. Проверьте, что имеются естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B L, N) = \mathrm{Hom}_B(L, \mathrm{Res}^A_B N) \quad \text{и}$$
$$\mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_B(A, L)) = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Res}^A_B N, \{m \in L \mid \alpha m = 0 \text{ для всех } \alpha \in \ker h\}).$$

(4) Пусть C – циклическая группа и k – поле. Опишите (а) групповую алгебру $k[C]$; (б) все представления C над полем k.

2. Простые модули

Левым (соотв., *правым*) *идеалом* кольца A называется левый (соотв., правый) A-подмодуль в A.

Модуль называется *простым* если не содержит собственных ненулевых подмодулей. Представление называется *неприводимым*, если соответствующий модуль прост.

Модуль M называется *полупростым* если любой его подмодуль N является прямым слагаемым, т.е. допускает такой подмодуль N', что M является прямой суммой N и N'. (Обозначение: $M = N \dotplus N'$.)

Упражнения. Пусть M – левый A-модуль.

(1) Обозначим через $\mathrm{End}_A(M)$ множество эндоморфизмов левого A-модуля M. (а) Введите на $D := \mathrm{End}_A(M)$ структуру ассоциативного кольца с единицей и постройте естественный гомоморфизм колец с единицей $\Phi : A \to \mathrm{End}_D(M)$. (б) Покажите, что Φ инъективен, если A-модуль M точен. (в) Постройте естественный изоморфизм колец $\mathrm{End}_A(A)$ и A^{op} (кольцо A, но с противоположным умножением). (г) Пусть M' – левый A-модуль. Введите на $\mathrm{End}_A(M, M')$ структуру левого $\mathrm{End}_A(M')$-модуля и правого $\mathrm{End}_A(M)$-модуля. (д) Рассматривая $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ как правый $\mathrm{End}_A(A)$-модуль, т.е. как левый A-модуль, постройте естественный изоморфизм A-модулей $\mathrm{Hom}_A(A, M) \xrightarrow{\sim} M$.

(2) (I.Schur) Пусть M – простой A-модуль. Тогда $\mathrm{End}_A M$ является телом. Более того, если A – конечномерная алгебра над алгебраически замкнутым полем k, то $\mathrm{End}_A M = k \cdot id_M$.

(3) Пусть A – ассоциативная комплексная алгебра не более чем счётной размерности и V – простой A-модуль. Докажите, что любой эндоморфизм A-модуля V скалярен. В частности, эндоморфизмы неприводимого комплексного представления счётной группы скалярны. [Подсказка. Покажите, что пространство V не более чем счётномерно, а любое тело, строго содержащее поле комплексных чисел, несчётномерно как векторное пространство.]

(4) (а) Пусть левый A-модуль M является суммой некоторого множества I простых подмодулей. Докажите, что тогда имеется такое подмножество $J \subseteq I$, что M является прямой суммой подмодулей из J.

(б) Докажите, что следующие условия на левый A-модуль M эквивалентны: (i) M полупрост, (ii) M является суммой некоторого множества простых подмодулей, (iii) M является прямой суммой некоторого множества простых подмодулей, (iv) любая сюръекция A-модулей $M \to N$ расщепляется.

(в) *Изотипическое разложение.* Для каждого класса изоморфизма $\bar{N}$ простых A-модулей и каждого полупростого A-модуля M обозначим через $M_{\bar{N}}$ сумму в M всех A-подмодулей из класса $\bar{N}$. (i) Докажите, что $M = \sum_{\bar{N}} M_{\bar{N}}$, причём эта сумма – прямая.

(ii) Постройте канонический изоморфизм $N \otimes_{\mathrm{End}_A(N)} \mathrm{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\sim} M_{\bar{N}}$ для любого $N \in \bar{N}$.

(iii) В условиях п. (a) разобьём множество J в несвязное объединение $J = \coprod_{\bar{N}} J_{\bar{N}}$ по множеству классов изоморфизма $\bar{N}$ простых A-модулей: $J_{\bar{N}} \subseteq J$ состоит из подмодулей из класса $\bar{N}$. Постройте (неканоническую) биекцию множества $J_{\bar{N}}$ на базис векторного пространства $\mathrm{Hom}_A(N, M)$ над телом $D = \mathrm{End}_A(N)$ и (неканонический) изоморфизм между $N \otimes_D \mathrm{Hom}_A(N, M)$ и прямой суммой $\#J_{\bar{N}}$ копий N.

Выведите отсюда, что мощность $\#J_{\bar{N}}$ множества $J_{\bar{N}}$ совпадает с $\dim_D \mathrm{Hom}_A(N, M)$, т.е. зависит только от M (а не от I или J) и называется *кратностью* $\bar{N}$ в M.

(5) Пусть N и N' – полупростые левые A-модули. Докажите, что (a) $\mathrm{Hom}_A(N, N') \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(N', N) \neq 0$; (б) существует сюръекция A-модулей $N \to N'$ тогда и только тогда, когда существует инъекция A-модулей $N' \hookrightarrow N$.

(6) *Теорема о плотности.* Положим $D := \mathrm{End}_A(M)$. Покажите, что образ Φ из задачи (1) плотен в $\mathrm{End}_D(M)$, если A-модуль M полупрост.

Обратно, пусть N – правый модуль (правое векторное пространство) над некоторым ассоциативным кольцом с делением D. Тогда любое плотное подкольцо R в $\mathrm{End}_D(N)$ допускает некоторый точный простой R-модуль.

(7) Предположим, что характеристика поля k не делит порядок конечной группы G, или эта характеристика – нулевая. Пусть V – представление группы G над полем k.

(a) (H.Maschke) Докажите, что V полупросто.

[Подсказка. Пусть $U \subset V$ – подпредставление. Выберите произвольную линейную проекцию V на U, а затем «усредните» её по действию группы.]

(б) Докажите, что если представление V порождено некоторым вектором, то оно вкладывается в $k[G]$ (регулярное представление).

(в) Докажите, что в изотипическом разложении регулярного представления $k[G]$ кратность неприводимого подпредставления совпадает с его размерностью как пространства над телом эндоморфизмов.

(8) Пусть G – группа, k – поле. Предположим, что любое представление группы G над полем k полупросто. Докажите, что группа G конечна.

Верно ли, что характеристика поля k не делит порядок группы G?

(9) Пусть кольцо A содержит поле k. Проверьте, что (a) любой A-модуль является k-векторным пространством, (б) если A-модуль M является одномерным k-векторным пространством, то M прост; (в) любой конечномерный над k A-модуль допускает минимальный (ненулевой) A-подмодуль.

(10) Пусть кольцо A коммутативно и содержит алгебраически замкнутое поле k. Докажите, что если A-модуль M прост и является конечномерным k-векторным пространством, то M одномерен.

(11) Докажите, что любое конечномерное представление допускает неприводимое подпредставление. Приведите пример бесконечномерного представления без неприводимых подпредставлений.

(12) Пусть A – k-алгебра, где поле k алгебраически замкнуто. Пусть V – неразложимый A-модуль (т.е. V не является прямой суммой), конечномерный над k. Центр $Z(A)$ алгебры A состоит из элементов, коммутирующих со всеми элементами A. Например, $Z(A) = A$, если A коммутативно.

(a) Покажите, что если V прост, то любой элемент центра z действует на V умножением на некоторый скаляр $\chi_V(z)$. Покажите, что $\chi_V : Z(A) \to k$ – гомоморфизм колец (который называется центральным характером).

(б) Покажите, что любой элемент центра z действует на V оператором $\rho(z)$ с единственным собственным значением, равным скаляру, умножением на который z действует на некотором простом A-подмодуле в V. Поэтому $\chi_V : Z(A) \to k$ – гомоморфизм колец (который снова называется центральным характером).

(в) Обязан ли оператор $\rho(z)$ из пункта (б) быть скалярным?

(13) Пусть V – ненулевой левый A-модуль. Вектор $v \in V$ называется циклическим, если он порождает V, т.е. $Av = V$. Модуль, допускающий циклический вектор называется циклическим. Покажите, что

(а) V прост тогда и только тогда, когда все ненулевые векторы являются циклическими.

(б) V является циклическим тогда и только тогда, когда он изоморфен A/I, где I – левый идеал в A; если $I + J = A$, то модуль $A/I \times A/J$ является циклическим. Верно ли, что если модуль $A/I \times A/J$ – циклический, то $I + J = A$?

(в) Докажите, что циклический полупростой модуль является конечной прямой суммой простых подмодулей.

(г) Верно ли, что циклический модуль является конечной прямой суммой неразложимых подмодулей? (ii) Докажите, что прямое слагаемое циклического модуля само является циклическим.

Приведите пример неразложимого, но не циклического модуля.

[Подсказка. Пусть k – поле, I – k-векторное пространство размерности $\geqslant 2$ (с нулевым умножением) и $A := k \oplus I$ – коммутативная k-алгебра. Пусть V – пространство линейных функционалов на A с действием $(af)(b) := f(ba)$. Покажите, что V даёт искомый пример.]

3. Простые кольца

Кольцо A называется *простым*, если в нём нет собственных ($\neq 0, A$) двусторонних идеалов.

(1) Покажите, что центр простого кольца A является полем.

(2) Пусть A – кольцо эндоморфизмов некоторого векторного пространства V. Рассмотрим A как топологическое векторное пространство с базисом открытых подпространств, состоящим из аннуляторов конечных подмножеств в V. Опишите все A-модули с открытыми аннуляторами всех элементов.

(3) (J.Wedderburn) Пусть k – поле и A – кольцо с центром k, допускающее некоторый минимальный (ненулевой) левый идеал M.

  (a) Предположим, что A просто. Тогда класс изоморфизма A-модуля M (а значит, и k-алгебры $D := \mathrm{End}_A M$) зависит только от A и существует такое (однозначно определённое) целое $n \geqslant 1$, что выполнено следующее: (а) A изоморфно прямой сумме n копий идеала M; (б) центр тела D совпадает с k и M – n-мерное векторное пространство над D; (в) естественный гомоморфизм колец $A \to \mathrm{End}_D M \cong \mathrm{Mat}_n(D)$ является изоморфизмом.

  (b) Предположим, что A конечномерно над k. Докажите, что следующие свойства A эквивалентны: (i) кольцо A просто; (ii) алгебра $A \otimes_k K$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ для некоторого n и некоторого алгебраически замкнутого расширения $K|k$; (iii) алгебра $A \otimes_k K$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ для некоторого n и любого алгебраически замкнутого расширения $K|k$; (iv) существует конечное расширение $K|k$ такое, что алгебра $A \otimes_k K$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(K)$ для некоторого n;[2] (v) $A \cong \mathrm{Mat}_n(D)$ для некоторого n и некоторого тела D с центром, равным k.[3]

(4) Пусть G – группа, K – поле и $\chi_1, \dots, \chi_N$ – набор попарно различных гомоморфизмов $G \to K^\times$ в мультипликативную группу поля. Докажите, что $\chi_1, \dots, \chi_N$ линейно независимы над K.

(5) Пусть K – поле, G – некоторая группа автоморфизмов поля K, а $k := K^G$ – неподвижное поле. Обозначим через $K\langle G\rangle$ кольцо (k-алгебру) K-значных распределений на G с конечным носителем (скрученное групповое кольцо). По определению, элементами $K\langle G\rangle$ являются конечные формальные суммы $\sum_i a_i[g_i]$, где $a_i \in K$ и $g_i \in G$.

[2] Например, в качестве K подходит максимальное подполе тела D из п. в), т.е. такое, что $[D:k] = [K:k]^2$.

[3] А именно, все простые A-модули M изоморфны, $A \hookrightarrow \mathrm{End}_k(M)$, $D := \mathrm{End}_A(M)$ – тело с центром, равным k, откуда $A \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_D(M)$ (Веддербёрн).

Сложение определяется покомпонентно; ассоциативное умножение определяется так: $(\sum_i a_i[g_i])(\sum_i b_i[h_i]) = \sum_{ij} a_i \cdot g_i b_j \cdot [g_i h_j]$.

Умножение в K задаёт вложение поля K в кольцо $\mathrm{End}_k(K)$ эндоморфизмов поля K как k-векторного пространства; действие группы G на поле K задаёт вложение группы G в группу $\mathrm{Aut}_k(K)$ автоморфизмов поля K как k-векторного пространства.

(а) Докажите, что существует единственный гомоморфизм колец с единицей $K\langle G\rangle \to \mathrm{End}_k(K)$, согласованный с этими вложениями. (б) Выведите из задачи (4) инъективность этого гомоморфизма. (в) Постройте пример простого $K\langle G\rangle$-модуля и найдите кольцо его эндоморфизмов. (г) Выведите из (в) и теоремы о плотности, что образ гомоморфизма из (а) плотен. В частности, если группа G конечна, то (i) $[K : k] = |G|$; (ii) k-алгебра $K\langle G\rangle$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{End}_k(K) \cong \mathrm{Mat}_{|G|}(k)$; (iii) («теорема 90 Гильберта») любой $K\langle G\rangle$-модуль является прямой суммой простых подмодулей изоморфных K.

(6) *Теория Галуа.* Пусть $K|k$ – конечное расширение полей.

(а) Постройте естественную биекцию между множествами (i) подполей поля K, содержащих поле k; (ii) k-подалгебр с единицей кольца $\mathrm{End}_k(K)$ эндоморфизмов K, рассматриваемого как k-векторное пространство.

(б) Предположим, что $K|k$ – расширение Галуа, т.е. $k = K^G$ является неподвижным полем некоторой конечной группы автоморфизмов G поля K. Постройте естественную биекцию $\{$подгруппы группы $G\} \leftrightarrow \{$подполя поля K, содержащие поле $k\}$.

(7) (а) Пусть A – минимальное подкольцо в $\mathrm{Mat}_6(\mathbb{Q})$, содержащее матрицы $x = \begin{pmatrix} u & 0_3 \\ 0_3 & u^2 \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} 0_3 & 0_3 \\ 1_3 & 0_3 \end{pmatrix}$, где $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ – блок 3×3, 0_3 – нулевая матрица и 1_3 – единичная матрица в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$. Докажите, что кольцо A не изоморфно своему противоположному.

(б) Пусть A – кольцо всех (2×2)-матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ таких, что a – целое число и b, c рациональны. Докажите, что кольцо A нётерово справа,[4] но не слева.

[4]т.е. любая возрастающая цепочка правых идеалов в A стабилизируется.