Литература: P.May, Notes on Tor and Ext, www.math.uchicago.edu/ may/MISC/TorExt.pdf
C.Weibel, An introduction to homological algebra, Cambridge Univ. Press.
Браун, Когомологии групп

1. Пределы, расслоенные произведения, сопряжённые функторы; инъективные, проективные объекты

Пусть $\mathcal{A}$, I – категории и $B : I \to \mathcal{A}$ – функтор. Пределом функтора B называется такое семейство морфизмов $\{D \xrightarrow{p_\alpha} B_\alpha\}_{\alpha\in I}$, что (i) $p_\beta = B(\varphi) \circ p_\alpha$ для любого морфизма $\varphi : \alpha \to \beta$, (ii) для любого аналогичного семейства морфизмов $\{D' \xrightarrow{p'_\alpha} B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ существует единственный морфизм $h : D' \to D$ такой, что $p'_\alpha = p_\alpha \circ h$.

Примеры. (1) I – категория, в которой для любого объекта имеется единственный морфизм (в себя). Тогда B – это семейство объектов $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ в $\mathcal{A}$, а предел B называется *произведением*.

Семейство морфизмов $\{D \xrightarrow{p_\alpha} B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется *произведением*, если для любогого семейства морфизмов $\{D' \xrightarrow{p'_\alpha} B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ существует единственный морфизм $h : D' \to D$ такой, что $p'_\alpha = p_\alpha \circ h$.

(2) I – категория, в которой имеется единственный конечный объект, а из любого объекта имеется (помимо морфизма в конечный объект) единственный морфизм (в себя). Тогда B – это семейство $\{B_i \xrightarrow{f_i} A\}_{i\in I}$ морфизмов в $\mathcal{A}$, а предел B называется *расслоенным произведением*.

Расслоенным произведением этого семейства называется произведение семейства объектов $\{B_i \xrightarrow{f_i} A\}_{i\in I}$ категории морфизмов в A, т.е. такое семейство морфизмов $\{C \xrightarrow{p_i} B_i\}_{i\in I}$, что $f_i \circ p_i$ не зависит от i и для любого другого семейства морфизмов $\{C' \xrightarrow{p'_i} B_i\}_{i\in I}$ с $f_i \circ p'_1$, не зависящими от i, существует единственный морфизм $h : C' \to C$ такой, что $p'_i = p_i \circ h$.

(3) I – категория, объекты которой – натуральные числа; из a в b имеется имеется ровно один морфизм, если $a \geqslant b$, из a в b морфизмов нет, если $a < b$. Тогда B – это семейство $B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow B_3 \leftarrow \dots$ морфизмов в $\mathcal{A}$, а предел B называется *проективным* или *обратным* пределом.

(4) I – категория с двумя объектами: 0, 1; имеется ровно по одному морфизму из 0 и из 1 в себя, имеется ровно два морфизма из 0 в 1, из 1 в 0 морфизмов нет. Тогда B – это диаграмма $B_0 \rightrightarrows B_1$ морфизмов в $\mathcal{A}$, а предел B называется *уравнителем*.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – категории, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ – пара функторов. Предположим, что заданы естественные биекции $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \mathcal{G}(Y))$. Тогда функтор $\mathcal{F}$ называется *сопряжённым* к $\mathcal{G}$ слева, а функтор $\mathcal{G}$ называется *сопряжённым* к $\mathcal{F}$ справа.

1. Постройте естественные преобразования функторов $Id_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ и $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \Rightarrow Id_{\mathcal{A}}$.
2. Опишите группы $\mathrm{Hom}(M, N)$, где M, N пробегают группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.
3. Предположим, что в категории имеется конечный объект T, т.е. из любого объекта имеется единственный морфизм в T. Докажите, что для семейства объектов произведение существует тогда и только тогда, когда существует расслоенное произведение над T. Кроме того, произведение и расслоенное произведение над T канонически изоморфны.
4. Докажите, что функтор декартова умножения на единичный отрезок на категории топологических пространств (в себя) сопряжён слева функтору пространства всех путей (т.е. непрерывных отображений из единичного отрезка). Используется ли в доказательстве какое-либо специфическое свойство категории топологических пространств, кроме наличия прямых произведений?
5. Пусть A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Докажите, что забывающий функтор из категории коммутативных ассоциативных A-алгебр с единицей, снабжённых дифференцированием, в категорию коммутативных ассоциативных A-алгебр с единицей допускает левый сопряжённый: $B \mapsto [B \xrightarrow{d} \Omega^1_{B|A} = \ker(\times)/\ker(\times)^2]$, $d : b \mapsto b \otimes 1 - 1 \otimes b$, где $\times : B \otimes_A B \longrightarrow B$ – гомоморфизм умножения.
6. *(Ко)цепным комплексом* A-модулей $(M_\bullet, \partial_\bullet)$ (соотв., $(M^\bullet, d^\bullet)$) называется последовательность A-модулей $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ и морфизмов $\partial_i : M_i \to M_{i-1}$ ($(M^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $d^i : M_i \to M_{i+1}$ в случае коцепного комплекса) такие, что $\partial_i\partial_{i+1} = 0$ (соотв., $d^{i+1}d^i = 0$) для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Морфизмом комплексов $\alpha_\bullet : M_\bullet \to N_\bullet$ называется набор морфизмов $\alpha_i : M_i \to N_i$, коммутирующих с дифференциалами. Докажите, что (а) ядра и коядра $\alpha_\bullet$ образуют комплекс; (б) короткой точной последовательности комплексов $0 \to M_\bullet \to M'_\bullet \to M''_\bullet \to 0$ соответствует длинная точная последовательность гомологий $\dots \to H_i(M_\bullet) \to H_i(M'_\bullet) \to H_i(M''_\bullet) \xrightarrow{\delta_i} H_{i-1}(M_\bullet) \to H_{i-1}(M'_\bullet) \to H_{i-1}(M''_\bullet) \to \dots$, где $\delta_i([m])$ (для $[m] \in H_i(M''_\bullet)$) определяется как класс $\partial_i^{M'}\tilde{m}$ в $H_{i-1}(M_\bullet)$.

(7) Пусть $\mathcal{F} : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$, $\mathcal{G} : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$ – пара сопряжённых аддитивных[1] функторов: заданы естественные биекции $\mathrm{Hom}_B(\mathcal{F}(X), Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(X, \mathcal{G}(Y))$.

Докажите, что функтор $\mathcal{F}$ точен справа,[2] а функтор $\mathcal{F}$ точен слева. В частности, для любого левого A-модуля X функтор $\mathrm{Hom}_A(X, -)$ и контравариантный функтор $\mathrm{Hom}_A(-, X)$ аддитивны и точны слева, а функтор $(-) \otimes_A X$ на категории правых A-модулей точен справа.

(8) Докажите, что эквивалентны следующие свойства A-модуля I: (i) любое вложение I расщепимо, (ii) для любой инъекции $f : C \to B$ любой морфизм $\alpha : C \to I$ поднимается до морфизма $\beta : B \to I$ т.е. $\alpha = \beta f$, (iii) для любого левого идеала $J \subset A$ любой морфизм $J \to I$ продолжается до морфизма $A \to I$, (iv) (контравариантный) функтор $\mathrm{Hom}_A(-, I)$ точен.[3]

A-модуль I, удовлетворяющий условиям (i)–(iv), называется *инъективным*.

(9) Докажите, что эквивалентны следующие свойства A-модуля P: (i) любая сюръекция на P расщепима, (ii) для любой сюръекции $g : B \to C$ любой морфизм $\gamma : P \to C$ поднимается до морфизма $\beta : P \to B$ т.е. $\gamma = g\beta$, (iii) функтор $\mathrm{Hom}_A(P, -)$ точен, (iv) P является прямым слагаемым свободного A-модуля.

A-модуль P, удовлетворяющий условиям (i)–(iv), называется *проективным*.

(10) Рассмотрим категорию групп или категорию модулей над некоторым ассоциативным кольцом. Пусть V – некоторый её объект. Композиционным рядом V называется такая строго возрастающая фильтрация $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$ объекта V подобъектами, что объекты $W_i := V_i/V_{i-1}$ просты для всех i, а в случае категории групп подгруппа V_{i-1} должна быть нормальна в V_i для всех i.

(а) (Жордан–Гёльдер) Пусть $0 = V'_0 \subseteq V'_1 \subseteq \dots \subseteq V'_m = V$ – другой композиционный ряд V. Докажите (индукцией по длине какого-нибудь композиционного ряда объекта V), что $n = m$, и существует такая перестановка σ чисел $1, \dots, n$, что объекты $W_{\sigma(i)}$ и W'_i изоморфны. Число $n = m$ называется *длиной* объекта V.

(б) (Крулль–Ремак–Шмидт) Докажите, что любой объект V конечной длины однозначно (с точностью до перестановки множителей) раскладывается в прямое произведение неразложимых подобъектов.

(11) Допустим, что ассоциативное кольцо A артиново слева, т.е. стабилизируется любая убывающая цепочка левых идеалов. Докажите, что (i) A допускает лишь конечное число (с точностью до изоморфизма) простых модулей: $M_1, \dots, M_n$; (ii) для каждого простого A-модуля M_i существует единственный (с точностью до изоморфизма) конечно порождённый проективный модуль P_i такой, что (а) P_i допускает единственный простой фактормодуль и (б) этот фактормодуль изоморфен M_i; (iii) $A \cong \bigoplus_{i=1}^n P_i^{d_i}$, $d_i = \dim_{\mathrm{End}_A(M_i)} M_i$; (iv) любой неразложимый конечно порождённый проективный A-модуль изоморфен P_i для некоторого i.

[Подсказка. Воспользуйтесь тем, что (i) $A/\mathrm{Rad}(A) \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{End}_{D_i}(M_i)$, где $D_i = \mathrm{End}_A(M_i)$ и $\mathrm{Rad}(A)$ – общий аннулятор всех простых A-модулей, (ii) $\mathrm{Rad}(A)$ – двусторонний нильпотентный идеал, и (iii) ортогональные идемпотенты в A/J, где J – нильпотентный двусторонний идеал, поднимаются до ортогональных идемпотентов в A.]

---

[1] Функтор $\mathcal{F}$ из категории A-модулей в категорию B-модулей называется *аддитивным*, если отображение $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_B(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$ из определения функтора $\mathcal{F}$ является гомоморфизмом групп.

[2] Функтор $\mathcal{F}$ на категории A-модулей называется *точным справа*, если для любой точной последовательности A-модулей $M' \to M \to M'' \to 0$ точна последовательность $\mathcal{F}(M') \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M'') \to 0$.

[3] Аддитивный функтор $\mathcal{F}$ из категории A-модулей *точен*, если для любой короткой точной последовательности A-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ точна последовательность $0 \to \mathcal{F}(M') \to \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M'') \to 0$.

(12) (C.Faith) (а) Докажите, что любой ненулевой левый идеал M в простом кольце A является образующей категории левых A-модулей. (Заметьте, что $A = MA$, т.е. $1 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i$, а значит, $A = MA = \sum_{i=1}^{n} M r_i$ является образом гомоморфизма из прямой суммы n копий A-модуля M.)

(б) Пусть N – левый A-модуль. Положим $D = \mathrm{End}_A(N)$. Тогда N является образующей категории левых A-модулей в том и только том случае, если естественный гомоморфизм $A \to \mathrm{End}_D(N)$ является изоморфизмом и правый D-модуль N конечно порождён и проективен.

(в) Пусть A – простое кольцо и I – ненулевой левый идеал в A. Положим $D = \mathrm{End}_A(I)$. Тогда I конечно порождён и проективен как правый D-модуль; естественный гомоморфизм $A \to \mathrm{End}_D(I)$ является изоморфизмом. Далее, кольцо D просто тогда и только тогда, когда I конечно порождён и проективен как правый D-модуль.

(13) Опишите все неразложимые инъективные абелевы группы.

2. Производные функторы

(1) Пусть $P_\bullet := [\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0]$ – некоторый комплекс, состоящий из левых проективных A-модулей, N – левый A-модуль, а $Q_\bullet := [\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0]$ – резольвента N, т.е. последовательность $\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \to N \to 0$ точна. Докажите, что любой морфизм $H_0(P_\bullet) \to N$ поднимается до морфизма комплексов $P_\bullet \to Q_\bullet$, причём однозначно с точностью до гомотопии.[4]

(2) Докажите, что гомотопные морфизмы комплексов индуцируют одинаковые отображения гомологий.

(3) Пусть A и B – некоторые ассоциативные кольца с единицей, $\mathcal{F} : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ точный справа функтор, коммутирующий с прямыми суммами,[5] из категории левых A-модулей в категорию левых B-модулей. (а) Введите структуру правого A-модуля на B-модуле $\mathcal{F}(A)$. (б) Докажите, что $\mathcal{F}$ изоморфен функтору $\mathcal{F}(A) \otimes_A (-)$. [Подсказка: каждый A-модуль представим как коядро морфизма между свободными A-модулями.] (в) Пусть k – поле и Vec_k – категория k-векторных пространств. Приведите пример точного функтора $\mathrm{Vec}_k \to \mathrm{Vec}_k$, коммутирующего с *конечными* прямыми суммами, но не изоморфного функтору вида $V \otimes_k (-)$. [Подсказка: постройте нетождественный функтор с тождественным ограничением на конечномерные k-векторные пространства.]

(4) Пусть M – левый A-модуль, а $P_\bullet := [\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0]$ – его проективная резольвента, т.е. последовательность $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ точна и A-модули $P_0, P_1, P_2, \ldots$ проективны. Докажите, что (а) $\mathcal{F}(P_\bullet) := [\cdots \to \mathcal{F}(P_2) \to \mathcal{F}(P_1) \to \mathcal{F}(P_0)]$ является комплексом для любого аддитивного функтора $\mathcal{F}$; (б) гомологии комплекса $\mathcal{F}(P_\bullet)$ не зависят от резольвенты $P_\bullet$ для любого аддитивного функтора $\mathcal{F}$ на категории левых A-модулей точного справа.

Определение. Тогда $L_q\mathcal{F}(M) := H_q(\mathcal{F}(P_\bullet))$ называется *q-м левым производным функтором* функтора $\mathcal{F}$.

(5) Пусть M – левый A-модуль, а $I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ – его инъективная резольвента, т.е. последовательность $0 \to M \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ точна и A-модули $I^0, I^1, I^2, \ldots$ инъективны. Докажите, что когомологии комплекса $\mathcal{G}(I^\bullet) := [\mathcal{G}(I^0) \to \mathcal{G}(I^1) \to \mathcal{G}(I^2) \to \ldots]$ не зависят от резольвенты $I^\bullet$ для любого точного слева[6] аддитивного функтора $\mathcal{G}$ на категории левых A-модулей.

Определение. Тогда $R^q\mathcal{G}(M) := H^q(\mathcal{G}(I^\bullet))$ называется *q-м правым производным функтором* функтора $\mathcal{G}$.

---

[4]Говорят, что морфизм комплексов $f_\bullet : (A_\bullet, \partial_\bullet^A) \to (B_\bullet, \partial_\bullet^B)$ *гомотопен нулю*, если существует такой набор отображений (*стягивающая гомотопия*) $h_n : A_n \to B_{n+1}$, что $h_{n-1}\partial_n^A + \partial_{\partial_{n+1}^B} h_n = f_n$. Два морфизма комплексов называются гомотопными, если их разность гомотопна нулю. (Стягивающая гомотопия их разности называется гомотопией между ними.)

[5]т.е. $\mathcal{F}(\bigoplus_{i\in I} M_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}(M_i)$ для любого семейства $(M_i)_{i\in I}$.

[6]т.е. если точна последовательность левых A-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, то точна и последовательность абелевых групп $0 \to \mathcal{G}(M') \to \mathcal{G}(M) \to \mathcal{G}(M'')$.

2.1. **Функторы** Ext, Tor, **(ко-)гомологии групп, тела над** $\mathbb{R}$.

(1) Пусть M – правый A-модуль и N – левый A-модуль. Модуль M (соотв., N) задаёт функторы $M \otimes_A (-)$, $\mathrm{Hom}_A(N,-)$ и $\mathrm{Hom}_A(-,N)$ (соотв., $(-)\otimes_A N$) на категории левых (соотв., правых) A-модулей. (i) Докажите, что функторы $M \otimes_A (-)$, $(-)\otimes_A N$ и $\mathrm{Hom}_A(-,N) : A\text{-mod} \to \mathbb{Z}\text{-mod}^{\mathrm{op}}$ точны справа, а функтор $\mathrm{Hom}_A(N,-)$ точен слева. (ii) Постройте естественный изоморфизмы $L_q(M\otimes_A(-))(N) \cong L_q((-)\otimes_A N)(M)$ и $R^q(\mathrm{Hom}_A(N,-))(L) \cong L^q(\mathrm{Hom}_A(-,L))(N)$.

Обозначение: $\mathrm{Tor}_q^A(M,N) := L_q((-)\otimes_A N)(M)$ и $\mathrm{Ext}_A^q(N,L) := R^q(\mathrm{Hom}_A(-,L))(N)$. В частности, $\mathrm{Tor}_0^A(M,N) := M\otimes_A N$ и $\mathrm{Ext}_A^0(N,L) := \mathrm{Hom}_A(N,L)$.

(2) Вычислите $L_q\mathcal{F}(A)$ для всех $q>0$. В частности, $\mathrm{Tor}_q^A(-,A)$, $\mathrm{Tor}_q^A(A,-)$ и $\mathrm{Ext}_A^q(A,-)$.

(3) Пусть k – поле. Вычислите (а) $\mathrm{Tor}_q^k(-,-)$ и $\mathrm{Ext}_k^q(-,-)$ для всех $q>0$;

(б) $\mathrm{Tor}_q^{k[X]}(-,-)$ и $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}}(-,-)$ для всех $q>1$;

(в) $\mathrm{Tor}_q^{k[X,Y]}(-,-)$ и $\mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}[X]}(-,-)$ для всех $q>2$.

(4) Пусть K – тело и $A\subseteq K$ – подкольцо.

(а) Вычислите $\mathrm{Tor}_q^A(-,K)$ и $\mathrm{Tor}_q^A(K,-)$ для всех $q>0$.

(б) Докажите, что если A коммутативно, то

$$\mathrm{Tor}_1^A(K/A,N) = \{x\in N \mid rx = 0 \text{ для некоторого } x\in A\} \text{ – подмодуль кручения.}$$

(5) Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) = (I\cap J)/IJ$ для любого ассоциативного кольца A, левого идеала $J\subseteq A$, правого идеала $I\subseteq A$.

[Подсказка: рассмотрите последовательности производных функторов $I\otimes_A(-)$ и $(-)\otimes_A(A/J)$ на последовательностях $0\to J\to A\to A/J\to 0$ и $0\to I\to A\to A/I\to 0$; в частности, проверьте точность последовательности $0\to IJ\to I\otimes_A(A/J)\to A/J\to 0$.]

В частности, (а) $\mathrm{Tor}_1^A(A/I,A/J)=0$, если $I+J=A$, (б) $\mathrm{Tor}_1^A(A/I,A/I)=I/I^2$ для любого двустороннего идеала $I\subseteq A$.

(6) Пусть G – группа и $\mathbb{Z}[G]$ – групповое кольцо. *(Ко-)омологии группы G с коэффициентами в G-модуле M* определяются так: $H^i(G,M) := \mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$ и $H_i(G,M) := \mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},M)$, где действие группы G на $\mathbb{Z}$ тривиально. Покажите, что (а) имеется такая свободная резольвента $\mathbb{Z}[G]$-модуля $\mathbb{Z}$: $\cdots\to\mathbb{Z}[G^3]\to\mathbb{Z}[G^2]\to\mathbb{Z}[G]$, где морфизм $\varepsilon:\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}$ переводит каждый элемент группы G в $1\in\mathbb{Z}$, G действует на G^i диагонально, а дифференциал $\partial_i:\mathbb{Z}[G^{i+1}]\to\mathbb{Z}[G^i]$ сопоставляет цепи $(g_0,\dots,g_i)$ знакопеременную сумму $\sum_{j=0}^i(-1)^j(g_0,\dots,\widehat{g_j},\dots,g_i)$;[7] (б) $H^0(G,M)$ состоит из элементов M неподвижных относительно группы G; (в) $H_0(G,M)$ – фактор абелевой группы M по подгруппе, порождённой элементами $gm-m$ для всех $g\in G$, $m\in M$; (г) $H^1(G,M)=\mathrm{Hom}(G,M)$ – гомоморфизмы групп, если действие G на M тривиально; (д) ядро ε является двусторонним идеалом и $H_1(G,\mathbb{Z})=\ker\varepsilon/(\ker\varepsilon)^2=G^{\mathrm{ab}}$ – абелианизация группы G, т.е. фактор группы G по коммутанту.

(7) Пусть Γ – циклическая группа. Покажите, что (а) групповое кольцо группы Γ изоморфно кольцу (i) $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ целочисленных многочленов Лорана, если Γ бесконечна, (ii) $\mathbb{Z}[t]/(t^n-1)$, если Γ порядка n; (б) $H^i(\Gamma,M)=H_i(\Gamma,M)=0$ при $i>1$, если Γ бесконечна; (в) $H^i(\Gamma,M)\cong H^{i+2}(\Gamma,M)$ и $H_i(\Gamma,M)\cong H_{i+2}(\Gamma,M)$ при $i>0$, если Γ конечна.

[Подсказка. Проверьте точность последовательности $0\to\mathbb{Z}[t,t^{-1}]\xrightarrow{\times(t-1)}\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ (соотв., $\cdots\xrightarrow{\times(t-1)}\mathbb{Z}[t]/(t^n-1)\xrightarrow{\times N}\mathbb{Z}[t]/(t^n-1)\xrightarrow{\times(t-1)}\mathbb{Z}[t]/(t^n-1)$, где $N=t^{n-1}+\cdots+t+1$) и интерпретируйте её как проективную резольвенту $\mathbb{Z}[\Gamma]$-модуля $\mathbb{Z}$.]

(8) Пусть K – поле, G – некоторая конечная группа его автоморфизмов и $k=K^G$ – неподвижное поле. (а) Вычислите $H^2(G,K^\times)$, в случае (i) конечного поля K; (ii) $K=\mathbb{C}$. (б) Докажите, что группа Брауэра $\mathrm{Br}(K|k)$ вкладывается в $H^2(G,K^\times)$. [Подсказка. Воспользуйтесь описанием элементов группы Брауэра $\mathrm{Br}(K|k)$ как G-торсоров над PGL_nK, короткой точной последовательностью «G-модулей» $1\to K^\times\to\mathrm{GL}_nK\to\mathrm{PGL}_nK\to 1$ и теоремой 90 Гильберта.]

[7] Подсказка. Заметьте, что любой элемент $g\in G$ задаёт стягивающую гомотопию $h:(g_0,\dots,g_q)\mapsto(g,g_0,\dots,g_q)$.

(в) Опишите все (i) конечные тела; (ii) конечномерные вещественные тела.

3. Эйлеровы характеристики и K_0; конструкции (1-)коциклов на группах

(1) Пусть A – ассоциативное кольцо. Рассмотрим абелеву группу, образующие которой – *произвольные* левые A-модули, а соотношения имеют вид $[V_3]-[V_1]-[V_2]$ для всевозможных A-модулей V_1, V_2 и $V_3\cong V_1\oplus V_2$. Докажите, что эта группа нулевая.

(2) Пусть G – группа; A – коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, на котором задано действие группы G, т.е. гомоморфизм $G\to\mathrm{Aut}(A)$. Обозначим через $K(G,A)$ абелеву группу, образующие которой – это классы изоморфизма $A\langle G\rangle$-модулей, которые проективны и *конечно порождены* как A-модули, а соотношения имеют вид $[V_1\oplus V_2]-[V_1]-[V_2]$ для всевозможных $A\langle G\rangle$-модулей V_1,V_2, которые проективны и конечного ранга как A-модули. Докажите, что тензорное умножение над A задаёт на $K(G,A)$ структуру коммутативного кольца с единицей.

(3) Обозначим через $\mathrm{Pic}^l_A(G)$ множество классов изоморфизма $A\langle G\rangle$-модулей, которые свободны над A ранга 1. (i) Докажите, что $\mathrm{Pic}^l_A(G)$ является подгруппой мультипликативной группы кольца $K(G,A)$. Опишите нулевой элемент и пары противоположных элементов группы $\mathrm{Pic}^l_A(G)$. (ii) Докажите, что группа $\mathrm{Pic}^l_A(G)$ канонически изоморфна группе $H^1(G,A^\times)$. [Подсказка. Пусть $V\in\mathrm{Pic}^l_A(G)$. Множество образующих V как A-модуля является G-торсором над $A^\times$.]

(4) Пусть $\ell>1$ – целое, k – поле, содержащее корни из единицы всех ℓ-примарных степеней. Пусть группа $G=\mu_{\ell^\infty}$ корней из единицы всех ℓ-примарных степеней действует на поле $F=k(t)$ заменами переменной $\zeta: t\longmapsto\zeta t$. (i) Докажите, что $Z^1(G,F^\times)=\varprojlim\limits_{M} k(t)^\times/k(t^{\ell^M})^\times$. (ii) Обозначим через $\mathcal{P}$ некоторое подмножество в $k(t)^\times$, биективно проектирующееся на $k(t)^\times/t^{\mathbb{Z}}\cdot k(t^\ell)^\times$. Докажите, что имеется изоморфизм $Z^1(G,F^\times)=\mathbb{Z}_\ell\times\{$(возможно, бесконечные вправо) слова над алфавитом $\mathcal{P}\}$, т.е. любой 1-коцикл однозначно записывается в виде $t^af_0(t)f_1(t^\ell)f_2(t^{\ell^2})f_3(t^{\ell^3})\dots$, где $a\in\mathbb{Z}_\ell$ и $f_j\in\mathcal{P}$. (iii) Докажите, что в качестве $\mathcal{P}$ можно взять множество всех рациональных функций со значением 1 в 0 и без делителей числителя и знаменателя вида $t^\ell-a$. (iv) Возьмём в качестве $\mathcal{P}$ множество из п.(ii). Докажите, что подгруппа кограниц совпадает с подгруппой $\mathbb{Z}\times\{$конечные слова над алфавитом $\mathcal{P}\}$.

(5) Допустим, что конечно порождённые проективные A-модули свободны. (Например, A – поле.) Докажите, что сопоставление $A\langle G\rangle$-модулям, которые проективны и конечно порождены как A-модули их максимальной ненулевой внешней степени ($V\mapsto\det_A(V)$) продолжается до гомоморфизма абелевых групп $K_0(G,A)\to\mathrm{Pic}^l_A(G)$.

(6) Пусть $B\subset A$ – коммутативные кольца с единицей, и V – некоторый $A\langle G\rangle$-модуль. B-линейный гомоморфизм $\nabla: V\to\Omega^1_{A/B}\otimes_A V$ называется *B-связностью*, если он удовлетворяет правилу Лейбница: $\nabla(fv)=df\otimes v+f\nabla(v)$. Докажите, что связности на V образуют G-торсор над $\Omega^1_A\otimes_A\mathrm{End}_A(V)$. В частности, если V – свободный A-модуль ранга 1, то связности на V образуют G-торсор над $\Omega^1_A\otimes_A\mathrm{End}_A(V)$.

(7) Пусть V – некоторое F-полулинейное представление G, т.е. $F\langle G\rangle$-модуль. Докажите инъективность естественного отображения $F\otimes_{F^G}V^G\to V$, если действие группы G на F точно. Докажите биективность этого отображения в случае точного действия конечной группы G. Постройте естественные изоморфизмы $H^q(G,V)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^q_{F\langle G\rangle}(F,V)$.

(8) Пусть $V\in\mathrm{Pic}^l_A(G)$ (см. задачу 3). Для любой пары образующих $\eta,\omega\in V$ как A-модуля положим $\{\eta,\omega\}_1:=(\omega/\eta)d(\eta/\omega)\in\Omega^1_A$.

Выберем связность $\nabla: V\to\Omega^1_A\otimes_A V$. Докажите, что (i) $\{\eta,\omega\}_1:=\frac{\nabla\eta}{\eta}-\frac{\nabla\omega}{\omega}$; (ii) $\sigma\{\tau\eta,\eta\}_1+\{\sigma\eta,\eta\}_1=\{\sigma\tau\eta,\eta\}_1$, т.е. для любой образующей $\eta\in V$ отображение $\sigma\mapsto\{\sigma\eta,\eta\}_1$ является 1-коциклом; (iii) $\{\sigma\eta,\eta\}_1=\{\sigma\eta',\eta'\}_1+\sigma\{\eta,\eta'\}_1-\{\eta,\eta'\}_1$, т.е. класс когомологий $c_1(V)$ 1-коцикла $\sigma\mapsto\{\sigma\eta,\eta\}_1$ не зависит от η (и называется первым классом Чженя представления V); (iv) $c_1(-)$ является композицией изоморфизма задачи (3) и отображения $H^1(G,A^\times)\to H^1(G,\Omega^1_A)$, индуцированного морфизмом G-модулей $A^\times\to\Omega^1_A$, $a\mapsto\frac{da}{a}$.

(9) *Производная Шварца.* Пусть $B \subset A$ – такие коммутативные кольца с единицей, что $\Omega^1_{A/B}$ – свободный A-модуль ранга 1. (Например, расширение полей нулевой характеристики и степени трансцендентности 1.) Для любой пары образующих $\eta, \omega \in \Omega^1_{A/B}$ как A-модуля положим

$$\{\eta,\omega\}_2 := d\left(\frac{d(\eta\omega^{-1})}{\eta}\right)\omega - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\eta}d\left(\frac{\eta}{\omega}\right)\right)^2 \in \Omega^1_{A/B}\otimes_A \Omega^1_{A/B}.$$

(i) Докажите, что $\{\eta,\omega\}_2$ зависит только от классов η и ω в «проективном пространстве» $\{$образующие A-модуля $\Omega^1_{A/B}\}/B^\times$.

(ii) Пусть $\nabla : \Omega^1_{A/B} \to \Omega^1_{A/B}\otimes_A \Omega^1_{A/B}$ – произвольная B-связность. Докажите, что

$$\{\eta,\omega\}_2 = \nabla\left(\frac{\nabla\eta}{\eta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\eta}{\eta}\right)^2 - \nabla\left(\frac{\nabla\omega}{\omega}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\nabla\omega}{\omega}\right)^2,$$

откуда видно, что $\{\eta_1,\eta_2\}_2 + \{\eta_2,\eta_3\}_2 = \{\eta_1,\eta_3\}_2$.

(iii) Теперь предположим, что некоторая группа G действует автоморфизмами кольца A и сохраняет B. Докажите, что для любой образующей $\eta \in \Omega^1_{A/B}$ как A-модуля отображение $\sigma \mapsto \{\sigma\eta,\eta\}_2$ является 1-коциклом на G со значениями в $\Omega^1_{A/B}\otimes_A \Omega^1_{A/B}$, а класс этого 1-коцикла в $H^1(G, \Omega^1_{A/B}\otimes_A \Omega^1_{A/B})$ не зависит от η.

(iv) Предположим, что A – поле характеристики 0 и B – подполе, алгебраически замкнутое в A. Докажите, что $\{\eta,\omega\}_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta/\omega \in B^\times$, или $\eta = d\varphi^{-1}$ и $\omega = c\cdot d\varphi$ для некоторых $c \in B^\times$ и $\varphi \in A \smallsetminus B$.

(v) В предположениях пунктов (iii) и (iv), пусть $x \in A \smallsetminus B$ и G – такая группа автоморфизмов расширения полей A/B, что σx – дробно-линейная функция от x над B для всех $\sigma \in G$. Докажите, что класс в $H^1(G, \Omega^1_{A/B}\otimes_A \Omega^1_{A/B})$ из пункта (iii) тривиален.

(vi) Приведите пример группы автоморфизмов расширения полей A/B с нетривиальным классом Шварца.

(10) (Мультипликативность). Пусть $1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$ – короткая точная последовательность групп. Докажите, что $\chi(G) = \chi(G_1)\chi(G_2)$, если определены все три эйлеровы характеристики.

(11) Пусть $V^\bullet$ – конечный комплекс конечномерных векторных пространств, $H^\bullet$ – его когомологии. Постройте канонический изоморфизм $\bigotimes_i(\det V^i)^{(-1)^i} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_i(\det H^i)^{(-1)^i}$.

(12) Последовательность Майера–Вьеториса. Пусть A, G_1, G_2 – три группы и фиксированы гомоморфизмы $A \to G_1$ и $A \to G_2$. Рассмотрим категорию, объекты которой – коммутативные диаграммы вида. Докажите, что в этой категории есть начальные объекты, которые называются *амальгамой* групп G_1 и G_2 над A и обозначаются $G_1 *_A G_2$. Отождествите $G_1 *_A G_2$ с множеством конечных (возможно, пустых) слов над алфавитом $G_1 \cup G_2$, причём отождествляются слова вида $g_1\cdots g_{n-1}g_ng_{n+1}g_{n+2}\cdots g_N$ и $g_1\cdots g_{n-1}gg_{n+2}\cdots g_N$, если $g_n, g_{n+1} \in G_i$ ($i = 1$ или $i = 2$) и $g = g_ng_{n+1}$. (i) Проверьте, что приписывание одного слова к другому превращает $G_1 *_A G_2$ в группу. (ii) Пусть $G = G_1 *_A G_2$ и M – G-модуль. Постройте естественные длинные точные последовательности

$$\cdots \to H^{n-1}(A,M) \to H^n(G,M) \to H^n(G_1,M)\oplus H^n(G_2,M) \to H^n(A,M) \to H^{n+1}(G,M) \to \ldots$$

и

$$\cdots \to H_{n+1}(G,M) \to H_n(A,M) \to H_n(G_1,M)\oplus H_n(G_2,M) \to H_n(G,M) \to H_{n-1}(A,M) \to \ldots$$

В частности, $\chi(G) = \chi(G_1) + \chi(G_2) - \chi(A)$, если определены все три эйлеровы характеристики.