1. Предпучки и пучки (см. M.Artin, Grothendieck topologies, 1962)

1.1. **Определение.** *Топология Гротендика*[1] состоит из (а) категории и (б) для каждого объекта U, множества семейств морфизмов в U (которые называются покрытиями объекта U). От этих данных требуется, чтобы

- изоморфизмы были покрытиями,
- композиции покрытий были покрытиями: если $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$ и $\{U_{ij} \xrightarrow{\psi_{ij}} U_i\}_{j\in J}$ – покрытия, то и $\{U_{ij} \xrightarrow{\varphi_i\psi_{ij}} U\}_{i\in I,\, j\in J}$ – покрытие,
- замены базы покрытий были покрытиями: если $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ – покрытие и $V \to U$ – морфизм, то существуют расслоенные произведения[2] $U_i \times_U V$ и $\{U_i \times_U V \to V\}_{i\in I}$ – покрытие.

Проверьте, что следующие примеры задают топологии Гротендика.

(1) Категория – открытые подмножества некоторого топологического пространства, морфизмы – включения открытых подмножеств, покрытия – покрытия в обычном смысле.
(2) Категория – конечные множества, морфизмы – отображения конечных множеств, покрытия – такие конечные семейства отображений $\{U_i \xrightarrow{\varphi_i} U\}_{i\in I}$, что $\bigcup_{i\in I}\varphi_i(U_i) = U$.

1.2. **Предпучки и пучки.** Пусть T – топология Гротендика и $\mathcal{C}$ – категория с прямыми произведениями.[3]

Определение. *Предпучком на T со значениями в $\mathcal{C}$* называется функтор $\mathcal{F} : T^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$. Предпучок $\mathcal{F}$ называется *пучком*, если для любого покрытия $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ точна диаграмма

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I}\mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I}\mathcal{F}(U_i \times_U U_j).$$

В нашим примерах $\mathcal{C}$ будет категорией множеств или абелевых групп.

(1) Докажите, что пучок (абелевых) групп $\mathcal{F}$ является пучком множеств.
(2) Докажите, что если предпучок (абелевых) групп $\mathcal{F}$ является пучком множеств, то он является и пучком (абелевых) групп.
(3) Определите постоянный предпучок. Назовём пучок *постоянным*, если он ассоциирован с постоянным предпучком. *Локально постоянным* называется пучок $\mathcal{F}$, который постоянен на всех элементах некоторого покрытия. Пусть X – линейно связное топологическое пространство и $x \in X$. Докажите, что функтор слоя $x \in X$: $\mathcal{F} \mapsto \varinjlim_{U\ni x}\mathcal{F}(U)$ задаёт эквивалентность категорий локально постоянных пучков и $\pi_1(X,x)$-множеств.
(4) Докажите, что категория пучков в задаче (2) из §1.1 эквивалентна категории множеств.

1.3. **Пучок, ассоциированный с предпучком.** Пусть $\mathcal{F}$ – предпучок со значениями в некоторой категории $\mathcal{C}$ множеств с некоторой структурой (групп, модулей и т.п.). Для каждого $U \in T$ назовём элементы $a, b \in \mathcal{F}(U)$ эквивалентными, если существует такое покрытие $\{U_i \to U\}_{i\in I}$, ограничения на которое элементов a и b совпадают. Обозначим через $\mathcal{F}^s(U)$ множество классов эквивалентности в $\mathcal{F}(U)$.

Тогда $\mathcal{F}^s : U \mapsto \mathcal{F}^s(U)$ – предпучок на T со значениями в категории $\mathcal{C}$.

---

[1]Точнее, *предтопология* Гротендика.

[2]Пусть $\alpha : U \to V$ и $\beta : W \to V$ – морфизмы. Расслоенным произведением α и β называется диаграмма $U \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} X \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} W$ такая, что (i) $\alpha\circ\mathrm{pr}_1 = \beta\circ\mathrm{pr}_2$ и (ii) для любой диаграммы $U \xleftarrow{p_1} Y \xrightarrow{p_2} W$ такой, что $\alpha\circ p_1 = \beta\circ p_2$ существует единственный морфизм $f : Y \to X$ такой, что $\mathrm{pr}_1\circ f = p_1$ и $\mathrm{pr}_2\circ f = p_2$.

[3]Основные примеры категории $\mathcal{C}$: категории множеств, групп, модулей над кольцом.

Теперь рассмотрим множество, элементы которого состоят из покрытия $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ и согласованного набора сечений на элементах покрытия $\{a_i \in \mathcal{F}^s(U_i)\}_{i\in I}$, т.е. с совпадающими обратными образами в $\mathcal{F}^s(U_i \times_U U_j)$ элементов a_i, a_j относительно соответствующих проекций. Скажем, что элементы $(\{U_i \to U\}_{i\in I}, \{a_i \in \mathcal{F}^s(U_i)\}_{i\in I})$ и $(\{V_j \to U\}_{j\in J}, \{b_j \in \mathcal{F}^s(V_j)\}_{j\in J})$ эквивалентны, если обратные образы в $\mathcal{F}^s(U_i \times_U V_j)$ элементов a_i, b_j относительно соответствующих проекций совпадают. Чтобы проверить транзитивность этого отношения эквивалентности, воспользуемся отделимостью предпучка $\mathcal{F}^s$.

Обозначим через $\mathcal{F}^+(U)$ множество классов такого отношения эквивалентности.

(1) Докажите, что $\mathcal{F}^+ : U \mapsto \mathcal{F}^+(U)$ – пучок на T со значениями в категории $\mathcal{C}$.

(2) Докажите, что сопоставление предпучку $\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}^+$ задаёт *точный* функтор из категории предпучков в категорию пучков, причём этот функтор сопряжён слева к функтору включения категории пучков в категорию предпучков:

$$\mathrm{Hom}_{\text{предпучки}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\text{пучки}}(\mathcal{F}^+, \mathcal{G}),$$

если $\mathcal{G}$ – пучок; в частности, (i) любой морфизм предпучков из $\mathcal{F}$ в любой пучок на T однозначно пропускается через $\mathcal{F}^+$, (ii) $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}$, если $\mathcal{F}$ – пучок.

(3) Пусть T – топология Гротендика и $\mathcal{I}$ – «интервал» в T: такая полная подкатегория в T, что если морфизм в $\mathcal{I}$ (как морфизм в T) пропускается через объект Z, то Z изоморфен некоторому объекту $\mathcal{I}$. Пусть $\mathcal{C}$ – категория с начальным и конечным объектом[4] 0 и $\mathcal{F} : T^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ – пучок. Определим предпучок

$$\mathcal{F}_{\mathcal{I}} : U \mapsto \begin{cases} \mathcal{F}(U), & \text{если } U \text{ изоморфен некоторому объекту } \mathcal{I} \\ 0, & \text{если } U \text{ не изоморфен никакому объекту } \mathcal{I} \end{cases}$$

(с отображениями ограничения пучка $\mathcal{F}$, когда это возможно, и нулевыми – в противном случае). Проверьте, что

(a) $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ не является, вообще говоря, пучком;

(b) $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^+ = \mathcal{F}$, если любой объект T допускает покрытие объектами $\mathcal{I}$;

(c) $\mathcal{F}_{\mathcal{I}}^+ = 0$, если любой объект T допускает покрытие объектами не изоморфными никаким объектам $\mathcal{I}$.

(Рассмотрите подробнее случай, когда задана такая функция $d : \mathrm{Ob}(T) \to \Psi$ со значениями в некотором вполне упорядоченном множестве Ψ, что если $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$, то $d(X) \geqslant d(Y)$, $I \subset \Psi$ – непустой интервал в Ψ, а $\mathcal{I}$ – полная подкатегория в T, объекты X которой определяются условием $d(X) \in I$.)

[4] Найдите начальные и конечные объекты категорий групп и множеств.