Фильтрованные и градуированные кольца, универсальные обёртывающие алгебры, некоторые представления алгебры $\mathfrak{sl}_2 k$

Литература:

Хамфрис, Введение в теорию алгебр Ли и их представлений, МЦНМО.

Серр, Алгебры и группы Ли

McConnell Robson, Noncommutative Noetherian rings

Фильтрацией кольца R (возрастающей и мультипликативной) называется такая последовательность абелевых подгрупп $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots R$, что $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ и $\bigcup_{i \geqslant 0} R_i = R$.

Градуировкой кольца S называется такое разложение $S = \bigoplus_{i \geqslant 0} S_i$ в прямую сумму абелевых подгрупп $S_0, S_1, S_2, \dots \subseteq R$, что $S_i S_j \subseteq S_{i+j}$.

Пример-обозначение. Если $R_0 \subseteq R_1 \subseteq R_2 \subseteq \dots$ – фильтрация кольца R, то на $\mathrm{gr}^\bullet R := \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{gr}^i R$, где $\mathrm{gr}^i R := R_i / R_{i-1}$, имеется естественная структура градуированного кольца.

Обозначение. Везде ниже k обозначает коммутативное кольцо с единицей.

k-алгеброй Ли называется k-модуль $\mathfrak{g}$ с k-билинейной операцией $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которая кососимметрична и удовлетворяет тождеству Лейбница: $[x, x] = 0$ и $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

1. Пусть R – такое фильтрованное кольцо, что кольцо $\mathrm{gr}^\bullet R$ нётерово слева. Докажите, что R также нётерово слева.

2. Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей, $A\langle T\rangle := \{\sum_{i=0}^n a_i T^i \mid a_i \in A\}$ – левый A-модуль многочленов (с покомпонентным сложением и очевидным умножением на элементы A). Рассмотрим какую-нибудь структуру ассоциативного кольца на $A\langle T\rangle$, согласованную со структурой левого A-модуля (относительно вложения констант $A \subset A\langle T\rangle$), т.е. какое-нибудь ассоциативное дистрибутивное умножение $A\langle T\rangle \times A\langle T\rangle \to A\langle T\rangle$, $(P, Q) \mapsto PQ$. Предположим, что $\deg(PQ) \leqslant \deg(P) + \deg(Q)$ для всех P, Q. Докажите, что

   (a) существует такие (i) гомоморфизм ассоциативных колец с единицей $\tau : A \to A$, $a \mapsto a^\tau$, и (ii) «τ-дифференцирование» $A \to A$, $a \mapsto a'$, т.е. $(ab)' = a^\tau b' + a' b$, что $Ta = a^\tau T + a'$;

   (b) если кольцо A нётерово слева (соотв., справа) и $\tau : A \to A$ из пункта (2a) биективен, то и кольцо $A\langle T\rangle$ нётерово слева (соотв., справа);

   (c) если A – тело, то кольцо $A\langle T\rangle$ (i) просто, (ii) евклидово справа;

(d) если A – тело, то кольцо $A\langle T\rangle$ евклидово слева тогда и только тогда, когда $\tau : A \to A$ сюръективно, т.е. – автоморфизм.

3. Пусть Φ – забывающий функтор из категории ассоциативных k-алгебр с единицей в категорию k-алгебр Ли: для любой ассоциативной k-алгебры A алгебра Ли $\Phi(A)$ – это тот же k-модуль, что и A, со скобкой $[x, y] := xy - yx$. Если k содержит поле из p элементов для некоторого простого p, то обозначим через $\Phi^{[p]}$ забывающий функтор из категории ассоциативных k-алгебр с единицей в категорию *ограниченных* k-алгебр Ли:[1] для любой ассоциативной k-алгебры A алгебра Ли $\Phi(A)$ – это тот же k-модуль, что и A, со скобкой $[x, y] := xy - yx$ и операцией $x^{[p]} := x^p$.

   (a) Докажите, что забывающие функторы Φ и $\Phi^{[p]}$ допускают левые сопряжённые функторы $U = U_k$ (универсальная обёртывающая алгебра) и $U^{[p]} = U_k^{[p]}$ (ограниченная универсальная обёртывающая алгебра). А именно, U сопоставляет k-алгебре Ли $\mathfrak{g}$ фактор тензорной алгебры $T(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n\geqslant 0} T_n(\mathfrak{g})$ k-модуля $\mathfrak{g}$ (где $T_n(\mathfrak{g}) := \underbrace{\mathfrak{g} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathfrak{g}}_{n \text{ множителей}}$) по двустороннему идеалу, порождённому элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$; функтор U^{res} сопоставляет ограниченной k-алгебре Ли $\mathfrak{g}$ фактор универсальной обёртывающей алгебры $U_k(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому элементами $x^p - x^{[p]}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.

   (b) Докажите, что универсальная обёртывающая прямой суммы k-алгебр Ли – это тензорное произведение (над k) их универсальных обёртывающих алгебр.

   (c) Докажите, что категория модулей над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентна категории модулей над ассоциативной алгеброй $U\mathfrak{g}$.

   (d) (Poincaré–Birkhoff–Witt) Пусть $S(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n\geqslant 0} S_k^n \mathfrak{g}$ – симметрическая алгебра k-модуля $\mathfrak{g}$ (т.е. фактор алгебры $T(\mathfrak{g})$ по двустороннему идеалу, порождённому элементами $x \otimes y - y \otimes x$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$).

   Докажите, что

      i. фильтрация $T_{\leqslant m}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{0\leqslant n\leqslant m} T_n(\mathfrak{g})$ алгебры $T(\mathfrak{g})$ индуцирует естественную возрастающую мультипликативную фильтрацию $U_\bullet\mathfrak{g}$ на универсальной обёртывающей алгебре $U\mathfrak{g}$ k-алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

      ii. естественный гомоморфизм градуированных алгебр

$$S(\mathfrak{g}) \to \bigoplus_{n\geqslant 0} U_n\mathfrak{g}/U_{n-1}\mathfrak{g}$$

      всегда сюръективен и является изоморфизмом, если $\mathfrak{g}$ свободна как k-модуль. Эквивалентно, если $\{x_i\}_{i\in I}$ – базис k-модуля $\mathfrak{g}$, где I – вполне упорядоченное множество, то семейство мономов $x_{i_1} \dots x_{i_n}$, $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n$, $n \geqslant 0$, образует базис k-модуля $U\mathfrak{g}$ (в частности, естественный гомоморфизм инъективен).

   (e) Докажите, что универсальная обёртывающая алгебра конечнопорождённой как k-модуль k-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нётерова и справа, и слева.

[1] Ограниченной k-алгеброй Ли называется алгебра Ли с такой дополнительной операцией $x \mapsto x^{[p]}$, что $\mathrm{Ad}(x^{[p]}) = \mathrm{Ad}(x)^p$; $(tx)^{[p]} = t^p x^{[p]}$; $(x + y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} s_i(x, y)$, где $s_i(x, y)$ – коэффициент при t^{i-1} в формальном выражении $\mathrm{Ad}(tx + y)^{p-1}(x)$.

(f) Пусть A – ассоциативная k-алгебра с единицей и $\Delta : A \to A \otimes_k A$ – гомоморфизм ассоциативных k-алгебр. Докажите, что множество $\{x \in A \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$ является k-подалгеброй Ли, причём ограниченной, если k – алгебра над конечным полем.

4. Пусть $\mathfrak{g}$ – k-алгебра Ли, V и W – $\mathfrak{g}$-модули. Зададим на $V \otimes_k W$ и на $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ умножение на элементы $\mathfrak{g}$ формулами $g(v \otimes w) = gv \otimes w + v \otimes gw$ и $g\varphi : v \mapsto g\varphi(v) - \varphi(gv)$ для всех $g \in \mathfrak{g}$, $v \in V$, $w \in W$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$. Проверьте, что это задаёт структуру $\mathfrak{g}$-модулей на $V \otimes_k W$ и на $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

5. Диагональный морфизм k-алгебр Ли $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ индуцирует гомоморфизм ассоциативных k-алгебр с единицей $\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes_k U\mathfrak{g}$ см. п. 3b. Докажите, что

   (a) диагональный морфизм $\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ индуцирует изоморфизм
   $$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \{x \in U\mathfrak{g} \mid \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\},$$
   если $\mathfrak{g}$ – свободный k-модуль и k не имеет $\mathbb{Z}$-кручения, т.е. $k \to k \otimes \mathbb{Q}$ инъективно;

   (b) тензорная структура на категории $U\mathfrak{g}$-модулей, заданная коумножением Δ, совпадает с тензорной структурой на $\mathfrak{g}$-модулях из задачи 4.

6. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой* (соотв., *нильпотентной*), если $\mathfrak{g}^{(N)} = 0$ (соотв., $\mathfrak{g}^{[N]} = 0$) для некоторого целого $N \geqslant 1$, где $\mathfrak{g}^{(0)} := \mathfrak{g} =: \mathfrak{g}^{[0]}$, $\mathfrak{g}^{(i+1)} := [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$ и $\mathfrak{g}^{[i+1]} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[i]}]$. Докажите, что алгебра верхнетреугольных матриц над коммутативным кольцом разрешима, а алгебра строго верхнетреугольных матриц – нильпотентна.

7. Нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *подалгеброй Картана*, если она совпадает со своим нормализатором (т.е. если $[X, Y] \in \mathfrak{h}$ для всех $X \in \mathfrak{h}$, то $Y \in \mathfrak{h}$).

   Пусть k – поле, V – конечномерное k-векторное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(V)$ или $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$.

   (a) Найдите в $\mathfrak{g}$ хотя бы одну подалгебру Картана.

   (b) Докажите, что группа $\mathrm{GL}(V)$ автоморфизмов V действует транзитивно на множестве всех подалгебр Картана, если k алгебраически замкнуто и характеристики 0.

8. *Радикалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется максимальный разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

   Пусть k – поле.

   (a) Докажите, что сумма двух идеалов в k-алгебре Ли является идеалом, причём разрешимым, если оба идеала разрешимы.

   (b) Докажите, что радикал *конечномерной* k-алгебры Ли существует и единственнен.

9. Пусть k – поле. Алгебра Ли называется *простой*, если она неабелева и её единственные идеалы – это она сама и $\{0\}$. Алгебра Ли называется *полупростой*, если она является прямой суммой простых алгебр Ли.

   Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная k-алгебра Ли. *Формой Киллинга* на $\mathfrak{g}$ называется симметрическая билинейная функция $\kappa(x, y) := \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y))$, где ad обозначает *присоединённое действие* $\mathfrak{g}$ на себе: $x : y \mapsto [x, y]$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$.

   Докажите, что следующие свойства *конечномерной* k-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентны:

   - $\mathfrak{g}$ полупроста;
   - форма Киллинга невырождена;
   - $\mathfrak{g}$ не имеет ненулевых абелевых идеалов;
   - $\mathfrak{g}$ не имеет ненулевых разрешимых идеалов;
   - радикал $\mathfrak{g}$ – нулевой.

10. Пусть k – поле, $\mathfrak{g}$ – конечномерная k-алгебра Ли.

    (a) Проверьте, что для любой невырожденной k-билинейной формы B на $\mathfrak{g}$ имеется единственный изоморфизм k-векторных пространств $\beta : \mathfrak{g}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ такой, что $\langle l, v\rangle = B(\beta(l), v)$ для всех $l \in \mathfrak{g}^\vee$ и $v \in \mathfrak{g}$.

    (b) Докажите, что изоморфизм β из пункта (a) является морфизмом $\mathfrak{g}$-*модулей* тогда и только тогда, когда $B([x, y], z) = B(x, [y, z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Форма B называется *инвариантной*, если выполнены эти условия.

    (c) *Элементом Казимира* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно инвариантной формы B называется образ $c = c_B \in U\mathfrak{g}$ тождественного эндоморфизма пространства $\mathfrak{g}$ относительно композиции изоморфизмов $\mathfrak{g}$-модулей

    $$\mathrm{End}_k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g}^\vee \xrightarrow{id\otimes\beta} \mathfrak{g} \otimes_k \mathfrak{g} \xrightarrow{a\otimes b\mapsto ab} U\mathfrak{g}.$$

    Элементом Казимира полупростой алгебры Ли (без указания билинейной формы) называется элемент Казимира относительно формы Киллинга.

    (d) Пусть V – точное конечномерное представление полупростой k-алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. V – конечномерное k-векторное пространство и задано вложение k-алгебр Ли $\mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Положим $B_V(x, y) := \mathrm{tr}(xy)$. Проверьте, что B_V – невырожденная инвариантная симметрическая билинейная k-форма на $\mathfrak{g}$. В частности, (случай присоединённого действия $\mathfrak{g}$ на $V = \mathfrak{g}$) форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ инвариантна.

    (e) Докажите, что c лежит в центре универсальной обёртывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ (и действует нулём на расширениях тривиальных представлений тривиальными).

    (f) Пусть k – поле комплексных чисел. Докажите, что любой центральный элемент алгебры $U\mathfrak{g}$ (в частности, c) действует в любом неприводимом представлении комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ умножением на число.

11. Пусть k – поле характеристики $p \geqslant 0$ и $\mathfrak{sl}_2 k$ – k-алгебра Ли 2×2-матриц над k с нулевым следом (с образующими e, f, h и соотношениями $[e, f] = h$, $[e, h] = -2e$, $[f, h] = 2f$).

(a) Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{sl}_2 k$ проста тогда и только тогда, когда $p \neq 2$.

(b) Вычислите элемент Казимира алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 k$.

(c) Пусть V – представление k-алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 k$. Для каждого $\lambda \in k$ положим $V_\lambda := \{v \in V \mid hv = \lambda v\}$, в частности, $\bigoplus_\lambda V_\lambda \subseteq V$. Докажите, что e индуцирует отображения $V_\lambda \to V_{\lambda+2}$, а f индуцирует отображения $V_\lambda \to V_{\lambda-2}$ для всех $\lambda \in k$.

12. Пусть k – поле характеристики 0. *Алгеброй Витта* называется k-алгебра Ли с базисом $\{L_n \mid \text{для всех } n \in \mathbb{Z}\}$ и скобкой $[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n}$.

   (a) Докажите, что отображение $L_m \mapsto -z^{m+1}\frac{d}{dz}$ вкладывает алгебру Витта в k-алгебру Ли дифференцирований k-алгебры многочленов (или рядов) Лорана от z.

   (b) Найдите все конечномерные k-подалгебры Ли в алгебре Витта.

13. Пусть $\mathfrak{A} = k[x]\langle \frac{d}{dx} \rangle$ – алгебра дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами над полем k характеристики $p \geqslant 0$. Докажите, что

   (a) алгебра $\mathfrak{A}$ проста, если $p = 0$;

   (b) $\mathfrak{A} \cong \mathrm{Mat}_p k[X, Y]$ ($X = x^p$, $Y = \frac{d^p}{dx^p}$);

   (c) естественный гомоморфизм $\mathfrak{A} \to \mathrm{End}_{k[x^p]} k[x] \cong \mathrm{Mat}_p k[x^p]$ сюръективен, если $p > 0$;

   (d) для каждого $\lambda \in k$ имеется вложение алгебр Ли $\rho_\lambda : \mathfrak{sl}_2 k \hookrightarrow \mathfrak{A}$, $(e, f, h) \mapsto (x, -(x\frac{d}{dx} + \lambda + 1)\frac{d}{dx}, 2x\frac{d}{dx} + \lambda + 1)$, которое переводит элемент Казимира c в $\lambda^2 - 1$, а ядро гомоморфизма $\rho_\lambda : U\mathfrak{sl}_2 k \to \mathfrak{A}$ порождено элементом $c - \lambda^2 + 1$.

14. Пусть k – поле характеристики $p \geqslant 0$. Рассмотрим k-векторное пространство V с базисом T_m, $m \in \mathbb{Z}$. Для каждого $\alpha \in k$ определим три k-линейных оператора h_α, e_α, f_α на V условиями $h_\alpha T_m = (\alpha + 2m)T_m$, $e_\alpha T_m = (\alpha + m)T_{m+1}$, $f_\alpha T_m = (\alpha - m)T_{m-1}$ для всех $m \in \mathbb{Z}$.

   (a) Проверьте, что $h_{\alpha-\beta}$, e_α, f_β порождают k-алгебру Ли, изоморфную (i) $\mathfrak{sl}_2 k$, если $p \neq 2$ или $\alpha \neq \beta$; (ii) $\mathfrak{gl}_1 k \oplus \mathfrak{gl}_1 k$, если $p = 2$ и $\alpha = \beta$. (А именно, $[e_\alpha, f_\beta] = h_{\alpha-\beta}$, $[e_\alpha, h_\beta] = -2e_\alpha$, $[f_\beta, h_\alpha] = 2f_\beta$.) Таким образом, возникает представление $V_{\alpha,\beta}$ алгебры $\mathfrak{sl}_2 k$.

   (b) Проверьте, что представления $V_{\alpha,\beta}$ и $V_{\alpha',\beta'}$ k-алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 k$ для некоторых $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in k$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ и $\alpha - \alpha'$ лежит в образе естественного гомоморфизма $\mathbb{Z} \to k$.

   (c) Пусть $p = 0$, т.е. $k \supseteq \mathbb{Q}$, и $\alpha, \beta \notin \mathbb{Z}$. Докажите, что представление $V_{\alpha,\beta}$ k-алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 k$ неприводимо.

   (d) Пусть $p = 0$ и $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Разложите $V_{\alpha,\beta}$ в прямую сумму неразложимых подпредставлений $\mathfrak{sl}_2 k$.

   (e) Найдите все подпредставления неразложимых подпредставлений k-алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2 k$ из пункта (14d) и выясните, какие из них изоморфны.