1. Центральные простые алгебры и группа Брауэра поля

Цель: определить некоторый функтор из категории полей в категорию абелевых групп кручения (функтор Брауэра) и изучить некоторые его свойства.

Определение. 1. Пусть k – поле. Ассоциативная k-алгебра с центром k называется *центральной* k-алгеброй.

2. Две конечномерные центральные простые k-алгебры *подобны*, если они изоморфны матричным алгебрам над изоморфными центральными простыми k-алгебрами с делением из теоремы Веддербёрна. (Равносильное условие: $A \sim A'$, если $A \otimes_k \mathrm{Mat}_n(k) \cong A' \otimes_k \mathrm{Mat}_{n'}(k)$ для некоторых n и n'.)

3. Обозначим через $\mathrm{Br}(k)$ множество классов подобных конечномерных центральных простых k-алгебр.

Упражнения.

(1) Пусть A – центральная простая алгебра над полем k и B – простая алгебра, содержащая k в своём центре. Докажите, что тогда (а) $A \otimes_k B$ – простая алгебра, (б) гомоморфизм $B \to A \otimes_k B$, $x \mapsto 1 \otimes x$, отождествляет центры алгебр B и $A \otimes_k B$.

(2) Пусть A – ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим через A^{op} алгебру, противоположную A, т.е. ту же аддитивную группу, что и A, но с умножением в обратном порядке: $x \overset{\mathrm{op}}{\cdot} y := y \cdot x$. Пусть Z – центр A. Постройте естественный гомоморфизм колец с единицей $A \otimes_Z A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}_k(A) \cong \mathrm{Mat}_{\dim A}(k)$ и докажите, что этот гомоморфизм является изомоморфизмом тогда и только тогда, когда A – центральная простая k-алгебра.

(3) Пусть A – конечномерная алгебра над полем k. Обозначим через A^{op} алгебру, противоположную A, т.е. то же k-векторное пространство, что и A, но с умножением в обратном порядке: $x \overset{\mathrm{op}}{\cdot} y := y \cdot x$. Постройте естественный гомоморфизм колец с единицей $A \otimes_k A^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{End}_k(A) \cong \mathrm{Mat}_{\dim A}(k)$ и докажите, что этот гомоморфизм является изомоморфизмом тогда и только тогда, когда A – центральная простая k-алгебра.

(4) *Группа Брауэра поля* k. Пусть A и B – конечномерные центральные простые k-алгебры. Докажите, что

(а) $\mathrm{Br}(k)$ совпадает с множеством классов изоморфизма конечномерных центральных k-алгебр с делением;

(б) класс подобия алгебры $A \otimes_k B$ зависит только от классов подобия алгебр A и B, и значит, тензорное умножение k-алгебр $\otimes_k$ индуцирует некоторую бинарную операцию $+$ на множестве $\mathrm{Br}(k)$;

(в) бинарная операция $+$ на $\mathrm{Br}(k)$ из п. (б) (i) коммутативна, (ii) ассоциативна, (iii) имеет нейтральный элемент – класс поля k: $[k] = 0$;

(в) элемент обратный классу некоторой алгебры – это класс противоположной алгебры: $[A] + [A^{\mathrm{op}}] = 0$ в $\mathrm{Br}(k)$;

(г) тензорное умножение $\otimes_k K$ на расширение K поля k индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(K)$.

Таким образом, множество $\mathrm{Br}(k)$ становится коммутативной группой, которая называется *группой Брауэра* поля k.

В частности, алгебра A изоморфна своей противоположной тогда и только тогда, когда её порядок в группе Брауэра равен 2.

(5) Пусть A – простое кольцо, k – его центр и $K \subseteq A$ – некоторое максимальное коммутативное подкольцо. Докажите, что естественный гомоморфизм колец $A \otimes_k K \to \mathrm{End}_K(A)$ инъективен, а его образ плотен. [Указание. Примените теорему о плотности к левому $(A \otimes_k K)$-модулю A, где K действует умножением справа.]

(6) Пусть A – простая k-алгебра размерности r^2, и $x \in A$ удовлетворяет полиномиальному уравнению $f(x) = 0$ степени r над k, но не удовлетворяет никакому уравнению меньшей степени. Если $f(x)$ разлагается на различные линейные множители, то $A \cong \mathrm{Mat}_r(k)$.

(7) Зафиксируем целое $r > 1$. Нас интересуют группы r-кручения в $\mathrm{Br}(k)$. Предположим, что поле k содержит примитивный корень из единицы ζ степени r.

(а) Пусть $A_\zeta(\alpha, \beta)$ – ассоциативная k-алгебра с единицей, порождённая элементами x, y с соотношениями $x^r = \alpha$, $y^r = \beta$, $yx = \zeta xy$. Докажите, что $A_\zeta(\alpha, \beta)$ – центральная k-алгебра размерности r^2.

[Пусть $\alpha, \beta \in k^\times$. Множество $x^i y^j$, $0 \leqslant i, j < r$, является базисом k-векторного пространства $A = A_\zeta(\alpha, \beta)$, собственным по отношению к операторам $\mathrm{ad}(x) : A \to A$ и $\mathrm{ad}(y) : A \to A$, где по определению $\mathrm{ad}(z) : w \mapsto z^{-1} w z$. А именно, $\mathrm{ad}(x) : x^i y^j \mapsto \zeta^j x^i y^j$ и $\mathrm{ad}(y) : x^i y^j \mapsto \zeta^i x^i y^j$, откуда центр алгебры A совпадает с k.

Пусть теперь $b = \sum_{0 \leqslant i,j < r} \varphi_{ij} x^i y^j$ –произвольный ненулевой элемент и $\varphi_{pq} \neq 0$. Тогда $b_1 := (\mathrm{ad}(x) - \zeta)(\mathrm{ad}(x) - \zeta^2) \cdots (\mathrm{ad}(x) - \zeta^{r-1}) x^{-p} b y^{-q} = \sum_{i=o}^{r} (1 - \zeta)(1 - \zeta^2) \cdots (1 - \zeta^{r-1}) \varphi_{iq} x^{i-p}$ и $b_2 := (\mathrm{ad}(x) - \zeta)(\mathrm{ad}(x) - \zeta^2) \cdots (\mathrm{ad}(x) - \zeta^{r-1}) b_1 = (1 - \zeta)^2 (1 - \zeta^2)^2 \cdots (1 - \zeta^{r-1})^2 \varphi_{pq} \in k^\times$. Поэтому любой двусторонний идеал, содержащий b, совпадает с A, т.е. A – центральная простая алгебра. $\square$]

(б) Проверьте, что имеются изоморфизмы $A_\zeta(\alpha, \beta) \to A_{\zeta^{-1}}(\beta, \alpha)$, $x \mapsto y$, $y \mapsto x$, $[yx = \zeta xy] \mapsto [xy = \zeta^{-1} yx]$; $A_\zeta(\alpha, \beta) \to A_\zeta(\beta, \alpha)^{\mathrm{op}}$, $x \mapsto y$, $y \mapsto x$, $[yx = \zeta xy] \mapsto [y \circ x = \zeta x \circ y]$.

(в) Покажите, что имеется канонический гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\mu_r, k^\times \otimes k^\times / r) \to \mathrm{Br}(k)$, сопоставляющий гомоморфизму со значением $\alpha \otimes \beta \bmod r$ на ζ класс k-алгебры $A_\zeta(\alpha, \beta)$.

(8) Выведите из задачи (6) соотношения Стейнберга: $A_\zeta(\alpha, 1 - \alpha) \cong \mathrm{Mat}_r(k)$, если $\alpha \neq 1$.

(9) Докажите, что для любых i, j взаимно простых с r отображение $x \mapsto x^i$, $y \mapsto y^j$ задаёт изоморфизм $A_\zeta(\alpha, \beta) \xrightarrow{\sim} A_{\zeta^{ij}}(\alpha^i, \beta^j)$.

(10) Пусть V – n-мерное k-векторное пространство. Докажите, что отображение $v \mapsto v \otimes V^\vee \subset V \otimes_k V^\vee$ отождествляет множество правых идеалов в $\mathrm{End}_k(V) = V \otimes_k V^\vee$ размерности n с проективным пространством $\mathbb{P}(V)$.

(11) (Для тех, кто знает, что такое алгебраическое многообразие.) Пусть Λ – центральная простая k-алгебра размерности r^2. Рассмотрим минимальные левые идеалы (они же – левые идеалы размерности r) в Λ как подпространства. Тогда они образуют подмножество многообразия Грассмана $\mathrm{Gr}(r, \Lambda) \subset \wedge^r \Lambda$. Докажите, что (а) свойство подпространства в Λ быть левым идеалом задаётся системой полиномиальных уравнений между плюккеровыми координатами, т.е. $\{$левые идеалы размерности r в $\Lambda\}$ определяет алгебраическое многообразие над k (многообразие Севери–Брауэра); (б) это многообразие изоморфно над $\overline{k}$ проективному пространству $\mathbb{P}^r_{\overline{k}}$.