Уравнения в частных производных

Вопросы к зачету за 3 модуль

1. Вывести уравнение малых поперечных колебаний струны. Вывести уравнение распространения тепла. Вывести стационарное уравнение для потенциального течения жидкости без источников. [1, § 1.2], [3, Лекция 1], [4, §§ 2.1, 6.1], [5, § 2.1].

2. Классификация квазилинейных уравнение с частными производными второго порядка. Главный часть уравнения, ее преобразования при замене независимых переменных. Классификация уравнений в точке. Основные типы уравнений второго порядка. Характеристические поверхности. [1, § 1.3], [2, § 2], [3, Лекция 3].

3. Привести уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду методом характеристик в малой окрестности точки, которая имеет гиперболический, параболический или эллиптический тип. [1, § 1.3], [3, Лекция 2].

4. Постановка основных краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка. Привести классификацию краевых задач: задача Коши для эволюционных уравнений, краевые задачи для уравнений эллиптического типа, смешанные задачи для уравнения колебаний и для уравнения диффузии. Определение корректной краевой задачи. Пример Адамара. [1, § 1.4], [3, Лекция 4].

5. Вывести формулу для общего решения уравнения малых свободных колебаний струны в выпуклой области по (x, t). Вывести формулу Даламбера для классического решения задачи Коши для уравнения колебаний струны на всей прямой. Доказать теорему существования и единственности классического решения для этой задачи. Установить корректность задачи по Адамару в соответствующих пространствах. Дать геометрическую интерпретацию формулы Даламбера: конечная область зависимости решения от начальных данных, конечная скорость распространения возмущений, бегущие волны. [2, §§ 3, 4], [3, Лекция 4], [4, § 2.2].

6. Обосновать формулу для классического решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны на всей прямой. Вывести формулу для решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний струны на полупрямой. Рассмотреть первую и вторую краевую задачи. [2, § 5], [3, Лекция 5].

7. Продемонстрировать метод Фурье для построения классического решения первой краевой задачи для однородного уравнения струны на конечном отрезке. Доказать теорему о существовании и единственности решения этой задачи при гладких финитных начальных данных $\varphi(x), \psi(x)$. [2, § 6], [3, Лекция 6].

8. Решить методом Фурье первую краевую задачу для неоднородного уравнения струны. Доказать теорему о существовании и единственности решения этой задачи при гладкой финитной функции $f(x, t)$. [2, § 7], [3, Лекция 6].

9. Доказать теорему об энергетической оценке для классического решения первой краевой задачи для уравнения струны на отрезке. Доказать корректность этой задачи в соответствующих пространствах. [2, § 8].

10. Обобщенные решения для уравнения малых колебаний струны. Требования для класса обобщенных решений. Построение класса обобщенных решений с помощью формулы Даламбера для непрерывных начальных данных. Построение класса обобщенных решений с помощью предельного перехода на примере формулы Даламбера.

Доказать теорему о существовании и единственности обобщенного решения метода предельного перехода для первой краевой задачи уравнения малых колебаний струны на конечном отрезке. [2, § 9].

11. Задача Штурма–Лиувилля. Доказать основные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля: симметричность и положительность оператора, ортогональность собственных функций, однократность собственных значений. Доказать теорему Штурма. Асимптотические свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма–Лиувилля [4, §§ 3.1, 3.2].

12. Построить функцию Грина задачи Штурма–Лиувилля и описать ее свойства. Доказать полноту системы собственных функций оператора Штурма–Лиувилля в пространстве $L_2[0, l]$. [4, § 3.4].

Список литературы

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.