Листок 4. Задача Коши и принцип максимума для уравнения теплопроводности

УРЧП, 3-4 курс, **12.04.2013**

4⋄1 При каких условиях на функцию $\varphi \in C_0^\infty((0,1))$ любое решение $u(x,t)$ в полуполосе $Q^\infty_{(0,1)}$ краевой задачи

а) $u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x);$
б) $u_t = u_{xx}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x)$

обладает свойством $u(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$?

4⋄2 Пусть

$$u_t = u_{xx} + \alpha u, \qquad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = \varphi(x).$$

Найдите все такие $\alpha \in \mathbb{R}$, что для любой начальной функции $\varphi \in C([0,1])$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, выполнено

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

4⋄3 Пусть функция $u(x,t)$ – решение задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u_x(0,t) = u_x(2,t) = 3, \qquad u(0,x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

при $0 \leqslant x \leqslant 2$, $t \geqslant 0$. Найдите $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$.

4⋄4 Пусть $u \in C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(\overline{Q})$ – решение в $Q = Q^\infty_{(-\pi,\pi)}$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u|_{x=\pm\pi}, \qquad u|_{t=0} = \sin^2 x.$$

Найти $\lim_{t\to+\infty} \int_0^\pi u(x,t)dx$. (Указание: использовать принцип максимума).

4⋄5 Пусть $u(x,t)$ – решение в $Q^\infty_{(0,\pi)}$ краевой задачи

$$u_t = u_{xx}, \qquad u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \qquad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi'(0) = \varphi(\pi) = 0$.

а) Доказать, что $\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$.
б) Верно ли, что $\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|$?

4⋄6 (Принцип Дюамеля) Пусть функция $u(x,t,\tau)$ принадлежит классу C^2 при $x \in R^n$, $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Докажите, что $u(x,t,\tau)$ при каждом $\tau \geqslant 0$ является решением задачи Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \qquad u|_{t=\tau} = f(x,\tau)$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x,t,\tau) = \int_\tau^t u(x,t,s)ds$$

при каждом $\tau \geqslant 0$ является решением задачи Коши

$$v_t = a^2\Delta u + f(x,t), \qquad u|_{t=\tau} = 0.$$

4⋄7 Решите задачу Коши:

а) $u_t = u_{xx} + 3t^2, \quad u|_{t=0} = \sin x$;
б) $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad u|_{t=0} = \mathrm{e}^{-x^2}$;
в) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + e^t, \quad u|_{t=0} = \cos x \cdot \sin y$;
г) $u_t = \Delta u + \cos(x - y + z), \quad u|_{t=0} = \mathrm{e}^{-(x+y-z)^2}$.

4⋄8 Пусть $u(x,t)$ – решение в $R \times R_+$ задачи Коши

а) $u_t = 4u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \frac{x^2+\sin x}{1+2x^2}$;
б) $u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \arctan x$.

Найти $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$. (Указание: использовать теорему о стабилизации.)

4⋄9 Применяя интегральное преобразование Фурье, решите краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty, \\ u_x(0,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x,0) = \varphi(x), 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

4⋄10 Дан тонкий однородный полуограниченный стержень ($0 \leqslant x < \infty$), боковая поверхность которого теплоизолирована. Найдите распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если конец стержня поддерживается при постоянной температуре $u|_{x=0} = 3$, а начальная температура $u|_{t=0} = 3e^{-x}$.