# 1. Полунормы и локально выпуклые топологии

**1.1.** Пусть $X$ — векторное пространство и $S \subset X$ — непустое подмножество. Докажите, что
**1)** $\operatorname{conv}(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;
**2)** $\operatorname{circ}(S) = \Big\{\lambda x : x \in S,\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leqslant 1\Big\}$;
**3)** $\Gamma(S) = \Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in S,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leqslant 1,\ n \in \mathbb{N}\Big\}$;
**4)** если $S$ закруглено, то и $\operatorname{conv}(S)$ закруглено;
**5)** $\Gamma(S) = \operatorname{conv}(\operatorname{circ}(S))$.

**1.2.** Докажите, что замыкание векторного подпространства в топологическом векторном пространстве является векторным подпространством.

**1.3.** Пусть $S$ — подмножество топологического векторного пространства $X$. Докажите, что
**1)** если $S$ выпукло, то его замыкание $\overline{S}$ и внутренность $\operatorname{Int} S$ выпуклы;
**2)** если $S$ закруглено, то $\overline{S}$ закруглено, а если вдобавок $0 \in \operatorname{Int} S$, то и $\operatorname{Int} S$ закруглено;
**3)** если $S$ открыто, то $\operatorname{conv}(S)$ открыто, а если вдобавок $0 \in S$, то $\operatorname{circ}(S)$ и $\Gamma(S)$ открыты.

**1.4.** Пусть $S$ — поглощающее множество в векторном пространстве $X$, и пусть $p_S$ — его функционал Минковского. Докажите, что
**1)** $p_S(\lambda x) = \lambda p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \geqslant 0$;
**2)** если $S$ выпукло, то $p_S(x+y) \leqslant p_S(x) + p_S(y)$ для всех $x, y \in X$;
**3)** если $S$ закруглено, то $p_S(\lambda x) = |\lambda| p_S(x)$ для всех $x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$;
**4)** если $S$ абсолютно выпукло, то $p_S$ — полунорма;
**5)** если $S$ выпукло, то $\{x : p_S(x) < 1\} \subset S \subset \{x : p_S(x) \leqslant 1\}$.

**1.5.** Докажите, что полунорма на векторном пространстве равна функционалу Минковского своего открытого единичного шара и своего замкнутого единичного шара.

**1.6.** Докажите, что в топологическом векторном пространстве абсолютно выпуклая открытая окрестность нуля равна открытому единичному шару своего функционала Минковского.

**1.7.** Пусть $p$ и $q$ — полунормы на векторном пространстве. Докажите, что $p \leqslant q$ тогда и только тогда, когда $U_q \subset U_p$, и $p \prec q$ тогда и только тогда, когда $U_q \prec U_p$.

**1.8.** Пусть $X$ — векторное пространство с топологией, порожденной некоторым семейством полунорм. Докажите, что $X$ — топологическое векторное пространство.

**1.9.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $P$ — определяющее семейство полунорм на $X$. Докажите, что последовательность $(x_n)$ сходится к элементу $x \in X$ тогда и только тогда, когда $p(x_n - x) \to 0$ для всех $p \in P$.

**1.10.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $P$ — определяющее семейство полунорм на $X$. Докажите, что $\overline{\{0\}} = \bigcap \{p^{-1}(0) : p \in P\}$.

**1.11.** Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, и пусть $0 < p < 1$. Обозначим через $L^p(X, \mu)$ пространство классов $\mu$-эквивалентности тех измеримых функций $f \colon X \to \mathbb{K}$, для которых функция $|f|^p$ интегрируема. Для $f \in L^p(X, \mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

**1)** Докажите, что $|\cdot|_p$ — $F$-норма на $L^p(X,\mu)$ (так что $L^p(X,\mu)$ — метризуемое топологическое векторное пространство).
**2)** Докажите, что $L^p(X,\mu)$ локально выпукло тогда и только тогда, когда оно конечномерно (т.е. когда в $X$ нет бесконечного семейства попарно не пересекающихся множеств положительной конечной меры).
**3)** Докажите, что на $L^p[0,1]$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов.

**1.12.** Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой, причем $\mu(X) < \infty$. Обозначим через $L^0(X,\mu)$ пространство классов $\mu$-эквивалентности всех измеримых функций $f\colon X \to \mathbb{K}$. Зафиксируем ограниченную неубывающую функцию $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ со следующими свойствами:

(i) $\varphi(s+t) \leqslant \varphi(s) + \varphi(t) \quad (s,t \geqslant 0)$;
(ii) $\varphi(0) = 0$;
(iii) $\varphi$ осуществляет гомеоморфизм между некоторыми окрестностями точки 0.

Например, можно положить $\varphi(t) = t/(1+t)$ или $\varphi(t) = \min\{t, 1\}$. Для $f \in L^0(X,\mu)$ положим

$$|f|_p = \int_X \varphi(|f(x)|)\, d\mu(x).$$

**1)** Докажите, что $|\cdot|_0$ — $F$-норма на $L^0(X,\mu)$ (так что $L^0(X,\mu)$ — метризуемое топологическое векторное пространство).
**2)** Докажите, что последовательность сходится в $L^0(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда она сходится по мере.
**3)** Докажите, что $L^0(X,\mu)$ локально выпукло тогда и только тогда, когда оно конечномерно (т.е. когда в $X$ нет бесконечного семейства попарно не пересекающихся множеств положительной конечной меры).
**4)** Докажите, что на $L^0[0,1]$ нет ненулевых непрерывных линейных функционалов.

## 2. Эквивалентные семейства полунорм

**2.1.** Пространство $s$ *быстро убывающих последовательностей* состоит из таких последовательностей $x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ последовательность $(x_n n^k)$ ограничена. Зафиксируем $p \in [1,+\infty)$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $s$ эквивалентны:

(1) $\|x\|_k^{(\infty)} = \sup_n |x_n| n^k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(2) $\|x\|_k^{(1)} = \sum_n |x_n| n^k \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(3) $\|x\|_k^{(p)} = \Big(\sum_n |x_n|^p n^{kp}\Big)^{1/p} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$.

**2.2.** *Пространство Шварца* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких функций $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, что для каждых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ функция $x^\alpha D^\beta f(x)$ ограничена. Зафиксируем произвольную норму $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^n$ и $p \in [1,+\infty)$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(2) $\|f\|_{k,\beta} = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|^k |D^\beta f(x)| \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$;

(3) $\|f\|_{k,\beta}^{(0)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\beta f(x)| \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^n)$;

(4) $\|f\|_{k,\beta}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^k |D^\beta f(x)|\, dx \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^n)$;

(5) $\|f\|_{k,\beta}^{(p)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|)^{kp} |D^\beta f(x)|^p\, dx\Big)^{1/p} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ , \beta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^n)$.

**2.3.** Пусть $U$ — область в $\mathbb{C}$, $\mathscr{O}(U)$ — пространство голоморфных функций в $U$. Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность областей, образующая компактное исчерпание $U$ (т.е. $U = \bigcup_i U_i$, $\overline{U_i}$ компактно и $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$ для всех $i$). Зафиксируем $p \in [1,+\infty)$ и обозначим через $\mu$ меру Лебега на плоскости. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{O}(U)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| \quad (K \subset U$ — компакт);

(2) $\|f\|_{k,\ell,K} = \sup_{z=x+iy\in K} \dfrac{\partial^{k+\ell} f(z)}{\partial x^k\, \partial y^\ell} \quad (K \subset U$ — компакт, $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$;

(3) $\|f\|_i^{(1)} = \int_{U_i} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (i \in \mathbb{N})$;

(4) $\|f\|_i^{(p)} = \Big(\int_{U_i} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (i \in \mathbb{N})$.

Эквивалентность семейств (1) и (2) означает, что компактно-открытая топология на $\mathscr{O}(U)$ совпадает с унаследованной из $C^\infty(U)$.

**2.4.** Пусть $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Для $f \in \mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ положим $c_n(f) = f^{(n)}(0)/n!$. Зафиксируем $p \in [1,+\infty)$ и обозначим через $\mu$ меру Лебега на окружности $|z| = r$. Докажите, что следующие семейства полунорм на $\mathscr{O}(\mathbb{D}_R)$ эквивалентны:

(1) $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)| \quad (K \subset U$ — компакт);

(2) $\|f\|_r^{(1)} = \sum_{n=0}^\infty |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(3) $\|f\|_r^{(p)} = \Big(\sum_{n=0}^\infty (|c_n(f)| r^n)^p\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R)$;

(4) $\|f\|_r^{\infty} = \sup_{n\geqslant 0} |c_n(f)| r^n \quad (0 < r < R)$;

(5) $\|f\|_r^{I} = \int_{|z|=r} |f(z)|\, d\mu(z) \quad (0 < r < R)$;

(6) $\|f\|_r^{I,p} = \Big(\int_{|z|=r} |f(z)|^p\, d\mu(z)\Big)^{1/p} \quad (0 < r < R)$.

## 3. Линейные операторы

**3.1.** Пусть $\lambda = (\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим *диагональный оператор*

$$M_\lambda \colon \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots).$$

**1)** Докажите, что $M_\lambda$ непрерывен.
**2)** Придумайте условие на $\lambda$, необходимое и достаточное для того, чтобы $M_\lambda(s) \subset s$.
**2)** Придумайте условие на $\lambda$, необходимое и достаточное для того, чтобы $M_\lambda$ был непрерывным оператором в $s$.

**3.2.** Опишите все непрерывные линейные функционалы на пространствах **1)** $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; **2)** $s$.

**3.3.** **1)** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Докажите непрерывность дифференциального оператора

$$\sum_{|\alpha| \leqslant N} a_\alpha D^\alpha \tag{1}$$

в пространстве $C^\infty(U)$, где $a_\alpha \in C^\infty(U)$ — фиксированные функции.
**2)** Придумайте разумное условие на функции $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, достаточное для того, чтобы формула (1) определяла непрерывный оператор в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
**3)** Докажите, что для любых функций $a_\alpha \in C^\infty(U)$ оператор (1) непрерывен в пространстве $C_c^\infty(U)$ гладких функций с компактным носителем.
**4)** Снабдим пространство $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ формальных степенных рядов топологией покоэффициентной сходимости. Докажите, что для любых $a_\alpha \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ оператор (1) непрерывен в пространстве $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$.
**5)** Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $a_1, \ldots, a_N \in \mathscr{O}(U)$. Докажите непрерывность дифференциального оператора

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dz^k} \tag{2}$$

в пространстве $\mathscr{O}(U)$.
**6)** Пусть $\mathscr{O}_z$ — пространство ростков голоморфных функций в точке $z \in \mathbb{C}$. Докажите, что для любых $a_1, \ldots, a_N \in \mathscr{O}_z$ оператор (2) непрерывен в $\mathscr{O}_z$.

**3.4.** Пусть $X$ и $Y$ — топологические векторные пространства, $\mathscr{U}$ — предбаза окрестностей нуля в $X$. Докажите, что линейный оператор $\varphi\colon X \to Y$ открыт тогда и только тогда, когда для каждого $U \in \mathscr{U}$ множество $\varphi(U)$ является окрестностью нуля в $Y$.

**3.5.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства, $P$ и $Q$ — определяющие семейства полунорм на $X$ и $Y$ соответственно, $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывный линейный оператор. Докажите, что
**1)** $\varphi$ топологически инъективен тогда и только тогда, когда он инъективен и для каждого $p \in P$ существуют такие $c > 0$ и $q_1, \ldots, q_n \in Q$, что $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i(\varphi(x)) \geqslant cp(x)$ для всех $x \in X$ (при этом, если $X$ хаусдорфово, то инъективность $\varphi$ следует из последнего условия);
**2)** $\varphi$ открыт тогда и только тогда, когда для каждого $p \in P$ существуют такие $C > 0$ и $q_1, \ldots, q_n \in Q$, что для каждого $y \in Y$ найдется $x \in X$, удовлетворяющий условиям $\varphi(x) = y$ и $p(x) \leqslant C \max_{1 \leqslant i \leqslant n} q_i(y)$.

**3.6.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p^{(k)} = (1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ ($k$ единиц, а дальше нули). Убедитесь, что для любого $\nu \in [1, +\infty]$ $\lambda^\nu(P) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ как топологическое векторное пространство.

**3.7.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p_n^{(k)} = n^k$. Убедитесь, что для любого $\nu \in [1, +\infty]$ $\lambda^\nu(P) = s$ как топологическое векторное пространство.

**3.8.** Рассмотрим множество последовательностей $P = \{p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots\}$, где $p_n^{(k)} = k^n$. Убедитесь, что для любого $\nu \in [1, +\infty]$ $\lambda^\nu(P) \cong \mathscr{O}(\mathbb{C})$ как топологическое векторное пространство.

**3.9.** Пусть $P$ — множество всех неотрицательных числовых последовательностей $p = (p_n)$, обладающих тем свойством, что $p_n = o(\varepsilon^n)$ для любого $\varepsilon > 0$. Постройте топологический изоморфизм $\lambda^1(P) \cong \mathscr{O}_z$ (где $z \in \mathbb{C}$).

## 4. Нормируемость и метризуемость

**4.1.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $P$ — определяющее семейство полунорм на $X$. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) $X$ полунормируемо;
(ii) на $X$ существует непрерывная полунорма, мажорирующая все остальные;
(iii) $P$ эквивалентно некоторому своему конечному подсемейству.

**4.2.** Пусть $S$ — бесконечное множество. Докажите, что на пространстве $\mathbb{K}^S$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

**4.3.** Пусть $X$ — некомпактное тихоновское топологическое пространство. Докажите, что на пространстве $C(X)$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

**4.4.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество. Докажите, что на пространстве $C^\infty(U)$ нет непрерывных норм. Как следствие, оно ненормируемо.

**4.5.** Докажите, что следующие пространства ненормируемы, хотя на каждом из них есть непрерывная норма: **1)** $s$; **2)** $C^\infty[a, b]$; **3)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; **4)** $\mathscr{O}(U)$ (где $U$ — область в $\mathbb{C}$); **5)** $\mathscr{O}_z$ (где $z \in \mathbb{C}$); **6)** $C_c^\infty(U)$ (где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество).

**4.6.** Докажите метризуемость следующих пространств:
**1)** $C(X)$, где $X$ — локально компактное топологическое пространство со счетной базой;
**2)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

**4.7.** Пусть $S$ — множество. Докажите, что пространство $\mathbb{K}^S$ метризуемо тогда и только тогда, когда $S$ не более чем счетно.

**4.8.** Докажите, что сильнейшее локально выпуклое пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

**4.9.** Докажите неметризуемость следующих пространств:
**1)** $C_c^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — непустое открытое множество;
**2)** $\mathscr{O}_z$, где $z \in \mathbb{C}$.

**4.10.** Пусть $X$ нормированное пространство. Докажите, что
**1)** сопряженное пространство $X'$ со слабой$^*$ топологией метризуемо тогда и только тогда, когда размерность $X$ не более чем счетна;
**2)** пространство $X$ со слабой топологией метризуемо тогда и только тогда, когда оно конечномерно.

## 5. Факторпространства

**5.1.** Пусть $X$ — топологическое векторное пространство и $X_0 \subset X$ — векторное подпространство. Снабдим $X/X_0$ фактортопологией. Докажите, что
**1)** $X/X_0$ — топологическое векторное пространство;
**2)** факторотображение $X \to X/X_0$ непрерывно и открыто;
**3)** $X/X_0$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда $X_0$ замкнуто;
**4)** если $X$ локально выпукло, то и $X/X_0$ локально выпукло;
**5)** если $X$ локально выпукло и $P$ — определяющее семейство полунорм на $X$, то семейство факторполунорм $\{\hat{p} : p \in P\}$ является определяющим для $X/X_0$.

**5.2.** Пусть $X$ — топологическое векторное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, $\pi\colon X \to X/X_0$ — факторотображение. Докажите, что для каждого топологическое векторного пространства $Y$ и каждого непрерывного линейного оператора $\varphi\colon X \to Y$, удовлетворяющего условию $\varphi(X_0) = 0$, существует единственный непрерывный линейный оператор $\widehat{\varphi}\colon X/X_0 \to Y$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/X_0 \arrow[ur, dashed, "\widehat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

**5.3.** В условиях предыдущей задачи докажите, что
**1)** $\widehat{\varphi}$ открыт $\iff$ $\varphi$ открыт;
**2)** $\widehat{\varphi}$ строгий $\iff$ $\varphi$ строгий;
**3)** $\widehat{\varphi}$ топологически инъективен $\iff$ $\varphi$ строгий и $X_0 = \operatorname{Ker}\varphi$;
**4)** $\widehat{\varphi}$ — топологический изоморфизм $\iff$ $\varphi$ открыт и $X_0 = \operatorname{Ker}\varphi$.

## 6. Произведения и обратные пределы

**6.1.** Пусть $X$ — векторное пространство, снабженное проективной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X \to X_i)_{i\in I}$, где $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что
**1)** проективная топология на $X$ — слабейшая из всех локально выпуклых топологий на $X$, относительно которых все $\varphi_i$ непрерывны;
**2)** проективная топология на $X$ — слабейшая из всех топологий на $X$, относительно которых все $\varphi_i$ непрерывны;
**3)** проективная топология на $X$ — единственная локально выпуклая топология на $X$ со следующим свойством: если $Y$ — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi\colon Y \to X$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\varphi_i \circ \psi\colon Y \to X_i$ непрерывны;
**4)** если для каждого $i \in I$ задана предбаза окрестностей нуля $\sigma_i$ в $X_i$, то семейство $\{\varphi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \sigma_i,\ i \in I\}$ является предбазой окрестностей нуля в $X$.

**6.2.** Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство ненулевых локально выпуклых пространств. Докажите, что
**1)** $\prod_{i\in I} X_i$ хаусдорфово $\iff$ все $X_i$ хаусдорфовы;
**2)** $\prod_{i\in I} X_i$ нормируемо $\iff$ все $X_i$ нормируемы, и $I$ конечно;
**3)** $\prod_{i\in I} X_i$ метризуемо $\iff$ все $X_i$ метризуемы, и $I$ не более чем счетно.

**6.3. 1)** Докажите, что произведение семейства локально выпуклых пространств является их произведением как объектов категории $\mathsf{LCS}$ локально выпуклых пространств.
**2)** Докажите, что в категории нормированных пространств бесконечное семейство ненулевых пространств не имеет произведения.

**6.4.** Пусть $\mathscr{X} = (X_i, \varphi_{ij})$ — обратная система локально выпуклых пространств. Положим

$$X = \Big\{ x = (x_i) \in \prod_{i\in I} X_i : x_i = \varphi_{ij}(x_j)\ \forall i < j \Big\}.$$

Снабдим $X$ топологией, унаследованной из $\prod_{i\in I} X_i$. Для каждого $i \in I$ пусть $\varphi_i \colon X \to X_i$ — проекция на $i$-й сомножитель.
**1)** Докажите, что $(X, \varphi_i)$ — обратный предел системы $\mathscr{X}$ в категории $\mathsf{LCS}$.
**2)** Докажите, что $X$ замкнуто в $\prod_{i\in I} X_i$.
**3)** Пусть для каждого $i \in I$ задана база окрестностей нуля $\mathscr{U}_i$ в $X_i$. Докажите, что семейство $\{\varphi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \mathscr{U}_i,\ i \in I\}$ — база окрестностей нуля в $X$.

**6.5.** Пусть $(X_i, \varphi_{ij})$ — обратная система локально выпуклых пространств, $X = \varprojlim(X_i, \varphi_{ij})$, $Y \subset X$ — векторное подпространство, $Y_i = \varphi_i(X) \subset X_i$.
**1)** Докажите, что $\overline{Y} = \varprojlim(\overline{Y_i}, \varphi_{ij}|_{\overline{Y_j}})$.
**2)** Верно ли, что $Y = \varprojlim(Y_i, \varphi_{ij}|_{Y_j})$?

**6.6.** Пусть $X = \varprojlim(X_i, \varphi_{ij})$ — приведенный обратный предел локально выпуклых пространств. Докажите, что $X$ нормируемо тогда и только тогда, когда система $(X_i, \varphi_{ij})$ «стабилизируется на нормируемом пространстве» в следующем смысле: существует такое $i_0 \in I$, что для каждого $i \geqslant i_0$ пространство $X_i$ нормируемо, и для каждых $j \geqslant i \geqslant i_0$ отображение $\varphi_{ij} \colon X_j \to X_i$ — топологический изоморфизм.

**6.7.** Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Постройте топологический изоморфизм $\prod_{i\in I} X_i \cong \varprojlim\{\prod_{i\in J} X_i : J \subset I$ — конечное множество$\}$.

**6.8.** Пусть $X$ — локально компактное топологическое пространство. Постройте топологический изоморфизм $C(X) \cong \varprojlim\{C(K) : K \subset X$ — компакт$\}$.

**6.9.** Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — его компактное исчерпание (т.е. такая цепочка открытых подмножеств $U$, что каждое $\overline{U_i}$ компактно, содержится в $U_{i+1}$, и $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$). Для каждого $i$ обозначим через $\mathscr{A}(\overline{U_i})$ подпространство в $C(\overline{U_i})$, состоящее из функций, голоморфных в $U_i$. Постройте топологический изоморфизм $\mathscr{O}(U) \cong \varprojlim_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{A}(\overline{U_i})$.

**6.10.** Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество. Представьте пространство $\mathscr{O}(U)$ в виде обратного предела последовательности гильбертовых пространств.

**6.11.** Рассмотрим линейный оператор $\varphi \colon \ell^\infty \to \ell^\infty$, действующий по формуле $\varphi(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$.
**1)** Докажите, что обратный предел последовательности $\ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \ell^\infty \xleftarrow{\varphi} \cdots$ топологически изоморфен $s$.
**2)** Докажите, что в п. 1 можно заменить $\ell^\infty$ на $\ell^p$ для любого $1 \leqslant p < \infty$ или на пространство $c_0 \subset \ell^\infty$ последовательностей, стремящихся к нулю на бесконечности.

**6.12.** Постройте топологический изоморфизм $C^\infty(\mathbb{R}) \cong \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} C^k[-k, k]$.

**6.13$^*$.** Представьте пространство $C^\infty(\mathbb{R})$ в виде обратного предела последовательности гильбертовых пространств.

**6.14.** Представьте пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в виде обратного предела последовательности **1)** банаховых пространств; **2$^*$)** гильбертовых пространств.

## 7. Прямые суммы и прямые пределы

**7.1.** Пусть $X$ — векторное пространство, снабженное индуктивной локально выпуклой топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$, где $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что

**1)** индуктивная топология на $X$ — сильнейшая из всех локально выпуклых топологий на $X$, относительно которых все $\varphi_i$ непрерывны;

**2)** индуктивная топология на $X$ — единственная локально выпуклая топология на $X$ со следующим свойством: если $Y$ — локально выпуклое пространство, то линейное отображение $\psi\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\psi \circ \varphi_i\colon X_i \to Y$ непрерывны;

**3)** семейство всех абсолютно выпуклых поглощающих множеств $U \subset X$, таких, что $\varphi_i^{-1}(U)$ — окрестность нуля в $X_i$ для всех $i$, образует базу окрестностей нуля в $X$.

**7.2*.** Пусть $X$, $X_i$, $\varphi_i$ — те же, что в предыдущей задаче. Предположим дополнительно, что $X = \sum_{i\in I} \operatorname{Im}\varphi_i$. Соответствующую индуктивную локально выпуклую топологию на $X$ обозначим через $\tau_{\mathrm{ivc}}$.

**1)** Докажите, что на $X$ существует сильнейшая из всех топологий, таких, что все отображения $\varphi_i$ непрерывны. Эту топологию будем обозначать через $\tau_{\mathrm{i}}$.

**2)** Докажите, что на $X$ существует сильнейшая из всех топологий, превращающих $X$ в топологическое векторное пространство и таких, что все отображения $\varphi_i$ непрерывны. Эту топологию будем обозначать через $\tau_{\mathrm{iv}}$.

**3)** Докажите, что если $I$ не более чем счетно, то $\tau_{\mathrm{iv}} = \tau_{\mathrm{ivc}}$.

**4)** Приведите пример ситуации, когда $I$ несчетно и $\tau_{\mathrm{iv}} \ne \tau_{\mathrm{ivc}}$.

**5)** Приведите пример ситуации, когда $I$ конечно и $\tau_{\mathrm{i}} \ne \tau_{\mathrm{iv}}$.

**7.3. 1)** Докажите, что прямая сумма семейства локально выпуклых пространств является их копроизведением как объектов категории $\mathsf{LCS}$ локально выпуклых пространств.

**2)** Докажите, что в категории нормированных пространств бесконечное семейство ненулевых пространств не имеет копроизведения.

**7.4.** Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств и $X = \bigoplus_{i\in I} X_i$. Для каждого $i \in I$ зафиксируем определяющее направленное семейство полунорм $P_i$ на $X_i$. Обозначим через $A$ множество всех функций $a\colon I \to [0, +\infty)$, а через $P$ — множество всех функций $p\colon I \to \bigsqcup_{i\in I} P_i$, таких, что $p(i) \in P_i$ для всех $i$. В дальнейшем для $a \in A$, $p \in P$ и $i \in I$ будем писать $a_i$ вместо $a(i)$ и $p_i$ вместо $p(i)$. Для каждых $a \in A$ и $p \in P$ введем полунорму $q_{a,p}$ на $X$, полагая $q_{a,p}(x) = \sum_{i\in I} a_i p_i(x_i)$, где $x = \sum_i x_i \in X,\ x_i \in X_i$.

**1)** Докажите, что семейство всех полунорм указанного вида является определяющим для $X$.

**2)** Пусть $Y$ — векторное пространство с индуктивной топологией оносительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X_i \to Y)_{i\in I}$, причем $Y = \sum_{i\in I} \operatorname{Im}\varphi_i$. Для каждых $a \in A$ и $p \in P$ введем полунорму $\hat q_{a,p}$ на $Y$, полагая

$$\hat q_{a,p}(y) = \inf\Big\{\sum_{i\in I} a_i p_i(x_i) : y = \sum_i \varphi_i(x_i),\ x_i \in X_i\Big\}.$$

Докажите, что семейство всех полунорм указанного вида является определяющим для $Y$.

**3)** Пусть $X_i$, $\varphi_i$, $Y$ — такие, как выше. Для каждого $i$ выберем базу $\mathscr{U}_i$ окрестностей нуля в $X_i$. Докажите, что семейство множеств

$$\Big\{\Gamma\Big(\bigcup_{i\in I}\varphi_i(U_i)\Big) : U_i \in \mathscr{U}_i\Big\}$$

является базой окрестностей нуля в $Y$.

**7.5.** Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство ненулевых локально выпуклых пространств. Докажите, что
**1)** $\bigoplus_{i\in I} X_i$ хаусдорфово $\iff$ все $X_i$ хаусдорфовы;
**2)** $\bigoplus_{i\in I} X_i$ нормируемо $\iff$ все $X_i$ нормируемы, и $I$ конечно;
**3)** $\bigoplus_{i\in I} X_i$ метризуемо $\iff$ все $X_i$ метризуемы, и $I$ конечно.

**7.6. 1)** Пусть $X$ — векторное пространство, $I$ — направленное множество, $(X_i)_{i\in I}$ — семейство векторных подпространств в $X$, причем $X_i \subset X_j$ при $i \leqslant j$, и $\bigcup_{i\in I} X_i = X$. Предположим, что каждое пространство $X_i$ снабжено локально выпуклой топологией таким образом, что для всех $i \leqslant j$ вложение $X_i$ в $X_j$ непрерывно. Снабдим $X$ индуктивной топологией относительно семейства вложений $(X_i \to X)_{i\in I}$. Докажите, что $X \cong \varinjlim X_i$.
**2)** Докажите, что прямой предел любой системы локально выпуклых пространств $(X_i, \varphi_{ij})$, в которой все отображения $\varphi_{ij}$ инъективны, получается так, как в п. 1.

**7.7.** Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Постройте топологический изоморфизм $\bigoplus_{i\in I} X_i \cong \varinjlim\{\bigoplus_{i\in J} X_i : J \subset I$ — конечное множество$\}$.

**7.8.** Пусть $X$ — локально компактное топологическое пространство со счетной базой. Обозначим через $C(X)_+$ множество всех неотрицательных непрерывных функций на $X$. Для каждого $a \in C(X)_+$ введем полунорму $\|\cdot\|_a$ на пространстве $C_c(X)$, полагая $\|f\|_a = \sup_{x\in X} |f(x)|a(x)$. Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_a : a \in C(X)_+\}$ является определяющим для $C_c(X)$.

**7.9.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Обозначим через $\mathscr{V}$ семейство всех наборов $v = (v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$, где $v_\alpha \in C(U)_+$ для всех $\alpha$, таких, что семейство $(\operatorname{supp} v_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}$ локально конечно. Для каждого $v \in \mathscr{V}$ введем полунорму $\|\cdot\|_v$ на пространстве $C_c^\infty(U)$, полагая

$$\|f\|_v = \sup_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} \sup_{x\in U} |D^\alpha f(x)|\, v_\alpha(x).$$

Докажите, что семейство полунорм $\{\|\cdot\|_v : v \in \mathscr{V}\}$ является определяющим для $C_c^\infty(U)$.

**7.10*. 1)** Представим пространство $C_c(\mathbb{R})$ в виде $C_c(\mathbb{R}) = \varinjlim C_{[-n,n]}(\mathbb{R})$, где $C_{[-n,n]}(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}$ с носителем в $[-n,n]$. Докажите, что индуктивная локально выпуклая топология на $C_c(\mathbb{R})$ не совпадает с индуктивной топологий $\tau_{\mathrm{i}}$ (см. задачу 7.2*).
**2)** Докажите аналогичное утверждение для пространства $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

**7.11.** Пусть $U \subset \mathbb{R}$ — открытое множество. Функция $f\colon U \to \mathbb{C}$ называется *вещественно-аналитической*, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки $x \in U$. Пусть $A(U)$ — пространство всех вещественно-аналитических функций на $U$. Обозначим через $\mathscr{K}$ семейство всех компактов в $U$, и для каждого $K \in \mathscr{K}$ обозначим через $\mathscr{V}(K)$ множество всех открытых подмножеств $\mathbb{C}$, содержащих $K$.
**1)** Убедитесь, что существуют изоморфизмы векторных пространств

$$A(U) \cong \varprojlim_{K\in\mathscr{K}} \mathscr{O}(K) \cong \varprojlim_{K\in\mathscr{K}} \Big(\varinjlim_{V\in\mathscr{V}(K)} \mathscr{O}(V)\Big), \tag{3}$$

где через $\mathscr{O}(K)$ обозначено пространство ростков голоморфных функций на $K$.
**2)** Докажите, что пространство $A(U)$, снабженное соответствующей локально выпуклой топологией (относительно которой изоморфизмы (3) являются топологическими), хаусдорфово.
**3)** Докажите, что последовательность сходится в $A(U)$ тогда и только тогда, когда она сходится равномерно на некоторой комплексной окрестности каждой точки $x \in U$.

**7.12.** Пусть $x \in \mathbb{R}$ и $C_x = \varinjlim C[x-1/n, x+1/n]$ — пространство ростков непрерывных функций в $x$, снабженное соответствующей индуктивной локально выпуклой топологией. Представим $C_x$ в виде $C_x = \mathbb{K}1 \oplus C_x^0$, где $C_x^0 = \{f \in C_x : f(x) = 0\}$. Докажите, что топология на $C_x^0$, унаследованная из $C_x$, тривиальна. Как следствие, $C_x$ нехаусдорфово.

**7.13.** Пусть $z \in \mathbb{C}$. Представим пространство $\mathscr{O}_z$ ростков голоморфных функций в $z$ в виде $\mathscr{O}_z = \varinjlim \mathscr{O}(U_{1/n}(z))$. Снабдим каждое из пространств $\mathscr{O}(U_{1/n}(z))$ топологией поточечной сходимости, а пространство $\mathscr{O}_z$ — соответствующей индуктивной локально выпуклой топологией. Представим $\mathscr{O}_z$ в виде $\mathscr{O}_z = \mathbb{K}1 \oplus \mathscr{O}_z^0$, где $\mathscr{O}_z^0 = \{f \in \mathscr{O}_z : f(z) = 0\}$. Докажите, что топология на $\mathscr{O}_z^0$, унаследованная из $\mathscr{O}_z$, тривиальна. Как следствие, $\mathscr{O}_z$ нехаусдорфово относительно введенной выше (неканонической) топологии.

## 8. Полнота

**8.1.** Докажите, что в топологическом векторном пространстве
**1)** всякая сходящаяся направленность фундаментальна;
**2)** всякая фундаментальная направленность, обладающая сходящейся поднаправленностью, сходится.

**8.2.** Докажите, что непрерывный линейный оператор между топологическими векторными пространствами переводит фундаментальные направленности в фундаментальные.

**8.3.** Докажите, что компактное подмножество любого хаусдорфова топологического векторного пространства полно.

**8.4.** Пусть $X$ — метризуемое топологическое векторное пространство и $\rho$ — метрика на $X$, определяющая его топологию и инвариантная относительно сдвигов. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(i) $X$ полно;
(ii) $X$ секвенциально полно;
(iii) $(X, \rho)$ полно как метрическое пространство.

**8.5.** Пусть $X$ — несчетное множество и $E$ — подпространство в $\mathbb{K}^X$, состоящее из всех функций с не более чем счетным носителем. Докажите, что $E$ секвенциально полно, но не полно.

**8.6.** Пусть $X$ — топологическое векторное пространство, $X_0 \subset X$ — плотное векторное подпространство. Докажите, что для любого полного топологического векторного пространства $Y$ всякий непрерывный линейный оператор из $X_0$ в $Y$ единственным образом продолжается до непрерывного линейного оператора из $X$ и $Y$.

**8.7.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что $\prod_{i \in I} X_i$ полно $\iff$ $\bigoplus_{i \in I} X_i$ полно $\iff$ $X_i$ полно для всех $i \in I$. Как следствие, сильнейшее локально выпуклое пространство полно.

**8.8.** Докажите, что обратный предел полных локально выпуклых пространств полон.

**8.9.** Пусть $Y$ — локально выпуклое пространство и $X \subset Y$ — векторное подпространство, снабженное локально выпуклой топологией, не менее сильной, чем унаследованная из $Y$. Назовем $X$ *локально замкнутым* в $Y$, если в $X$ есть база окрестностей нуля, замкнутых в $Y$. Докажите, что если $Y$ полно, а $X$ локально замкнуто в $Y$, то и $X$ полно.

**8.10.** Выведите из задачи 8.9 полноту нормированных пространств $\ell^p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$), $C(K)$ (где $K$ — компактное топологическое пространство), $\mathscr{L}(X,Y)$ (где $X$ — нормированное, а $Y$ — банахово пространство).

**8.11.** Докажите полноту следующих локально выпуклых пространств:
**1)** $C(X)$, где $X$ — локально компактное топологическое пространство;
**2)** $C^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
**3)** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$;
**4)** $\mathscr{O}(U)$, где $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество;
**5)** $\lambda^\nu(P)$, где $P$ — множество Кёте и $\nu \in [1, +\infty]$;
**6)** $C_c(X)$, где $X$ — локально компактное топологическое пространство со счетной базой;
**7)** $C_c^\infty(U)$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество;
**8)** $\mathscr{O}_z$, где $z \in \mathbb{C}$.

**8.12.** Для локально выпуклого пространства $X$ обозначим через $X^\infty$ прямое произведение, а через $X_\infty$ прямую сумму счетного числа экземпляров пространства $X$. Пусть $X$ и $Y$ — банаховы пространства, причем $Y$ непрерывно и инъективно вложено в $X$ с плотным образом. (Например, можно взять $X = \ell^2$ и $Y = \ell^1$.) Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon X_\infty \oplus Y^\infty \to X^\infty, \quad (x,y) \mapsto x + y.$$

Докажите, что $\varphi$ — открытое отображение на плотное собственное подпространство в $X^\infty$. Выведите отсюда, что факторпространство $(X_\infty \oplus Y^\infty)/\operatorname{Ker}\varphi$ неполно (хотя само $X_\infty \oplus Y^\infty$ полно).

**8.13*.** Докажите, что строгий прямой предел последовательности полных локально выпуклых пространств полон.

**8.14.** Пусть $X$ — локально выпуклое пространство, $(\widetilde{X}, j)$ — его пополнение.
**1)** Докажите, что для любой непрерывной полунормы $p$ на $X$ существует единственная непрерывная полунорма $\tilde{p}$ на $\widetilde{X}$, такая, что $\tilde{p} \circ j = p$. При этом $\overline{U}_{\tilde{p}} = \overline{j(U_p)}$.
**2)** Докажите, что если $P$ — определяющее семейство полунорм на $X$, то $\{\tilde{p} : p \in P\}$ — определяющее семейство полунорм на $\widetilde{X}$.
**3)** Докажите, что если $\mathscr{U}$ — база окрестностей нуля в $X$, то $\{\overline{j(U)} : U \in \mathscr{U}\}$ — база окрестностей нуля в $\widetilde{X}$.

**8.15.** Пусть $X$ — хаусдорфово локально выпуклое пространство. Опишите пополнение сопряженного пространства $X'$, снабженного слабой* топологией.

## 9. Ограниченные множества

**9.1.** Докажите, что относительно компактное подмножество топологического векторного пространства ограничено.

**9.2.** Пусть $X$ — топологическое векторное пространство. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(x_n)$ в $B$ и любой стремящейся к нулю последовательности $(\lambda_n)$ в $\mathbb{K}$ последовательность $(\lambda_n x_n)$ стремится к нулю.

**9.3.** Пусть $X$ — бесконечномерное нормированное пространство. Согласно теореме Банаха–Штейнгауза, подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено в слабой топологии. Таким образом, оператор $I\colon (X, \mathrm{wk}) \to X$, $I(x) = x$, переводит ограниченные множества в ограниченные, однако не является непрерывным.

**1)** Приведите несколько примеров нормированных пространств, в которых есть слабо сходящиеся последовательности, не сходящиеся по норме. Иначе говоря, в таких пространствах оператор $I$ не является секвенциально непрерывным.

**2*)** Покажите, что в пространстве $\ell^1$ слабая сходимость последовательностей эквивалентна сходимости по норме. Иначе говоря, для $X = \ell^1$ оператор $I$ является секвенциально непрерывным.

**9.4.** Пусть $X$ — векторное пространство, снабженное проективной топологией относительно семейства линейных отображений $(\varphi_i\colon X \to X_i)_{i \in I}$, где $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $\varphi_i(B)$ ограничено в $X_i$ для всех $i \in I$. В частности, подмножество $B \subset \prod_{i \in I} X_i$ ограничено тогда и только тогда, когда $B \subset \prod_{i \in I} B_i$, где $B_i \subset X_i$ — ограниченные подмножества.

**9.5.** Пусть $(X_i)_{i \in I}$ — семейство локально выпуклых пространств. Докажите, что подмножество $B \subset \bigoplus_{i \in I} X_i$ ограничено тогда и только тогда, когда существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $B \subset \prod_{j \in J} B_j$, где $B_j \subset X_j$ — ограниченные подмножества.

**9.6.** Пусть $X = \varinjlim X_n$ — строгий прямой предел последовательности локально выпуклых пространств, причем для каждого $n$ пространство $X_n$ замкнуто в $X_{n+1}$. Докажите, что подмножество $B \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $B$ содержится в некотором $X_n$ и ограничено в нем.

## 10. Топологии на пространствах отображений

**10.1.** Пусть $X$ — множество, $Y$ — локально выпуклое пространство, $F \subset Y^X$ — векторное подпространство и $\mathscr{B}$ — некоторое $F$-ограниченное семейство подмножеств $X$. Снабдим $F$ топологией равномерной сходимости на элементах семейства $\mathscr{B}$. Пусть $\mathscr{U}$ — какая-либо предбаза окрестностей нуля в $Y$. Для $B \in \mathscr{B}$ и $U \in \mathscr{U}$ положим $M(B, U) = \{\varphi \in F : \varphi(B) \subset U\}$. Докажите, что $\{M(B, U) : B \in \mathscr{B},\ U \in \mathscr{U}\}$ — предбаза окрестностей нуля в $F$.

**10.2.** Пусть $X$ и $Y$ — локально выпуклые пространства, $\mathscr{B}$ — какое-либо семейство ограниченных подмножеств $X$. Докажите, что пространство $\mathscr{L}_{\mathscr{B}}(X, Y)$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда $Y$ хаусдорфово и $\bigcup \mathscr{B}$ тотально в $X$.

**10.3.** Пусть $T_\ell$ и $T_r$ — операторы левого и правого сдвига в $\ell^2$. Исследуйте последовательности $(T_\ell^n)$ и $(T_r^n)$ на сходимость

**1)** по норме в $\mathscr{B}(\ell^2)$;

**2)** в сильной операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$;

**3)** в слабой операторной топологии на $\mathscr{B}(\ell^2)$.

**10.4.** Пусть $X$ и $Y$ — нормированные пространства. Обозначим через SOT, WOT и NT соответственно сильную операторную топологию, слабую операторную топологию и топологию, задаваемую операторной нормой на $\mathscr{L}(X, Y)$.

**1)** Докажите, что WOT $\subset$ SOT $\subset$ NT.

**2)** Докажите, что если $Y$ бесконечномерно, то WOT $\neq$ SOT.

**3)** Докажите, что если $X$ бесконечномерно, то SOT $\neq$ NT.