Листок 6. 8 апреля 2013

Задача 1. Рассмотрим расслоение $T^*M \to M$. Существует ли на нем такая связность ∇, что $\nabla_v \omega = L_v \omega$ для любой 1-формы ω и векторного поля v?

Задача 2. Пусть $e_1, e_2, ..., e_N$ набор локальных сечений (над некоторым открытым подмножеством базы U) векторного расслоения, такой что набор векторов $e_1(x), ..., e_N(x)$ является базисом слоя над точкой x. Для такого набора e локальных сечений определим *матрицу связности* $\theta = \theta(e)$ по аффинному ковариантному дифференцированию ∇ как матрицу 1-форм θ^i_j (i нумерует строку, j – столбец) следующим образом: $\nabla e_j = \sum_i \theta^i_j \otimes e_i$.

Рассмотрим другой такой набор локальных сечений v, связанный с набором e равенством $v_j(x) = \sum_i A^i_j(x) e_j(x)$, A^i_j – функция на U. Выразить $\theta(v)$ через $\theta(x)$.

Задача 3. Пусть ∇ аффинное ковариантное дифференцирование, u, v – векторные поля на базе расслоения, s – (локальное) сечение. Докажите, что
а) значение выражения $\nabla_u \nabla_v s - \nabla_v \nabla_u s - \nabla_{[u,v]} s$ в точке x зависит только от $u(x), v(x), s(x)$;
б) существует такая кососимметрическая 2-форма K на базе M расслоения со значениями в эндоморфизмах слоя расслоения, что для произвольных $u_0, v_0 \in T_x M$ и вектора s_0 из слоя над точкой x выполняется $K(x)(u_0, v_0)s_0 = \nabla_u \nabla_v s|_x - \nabla_v \nabla_u s|_x - \nabla_{[u,v]} s|_x$ для векторных полей u, v на базе и локального сечения s, таких что $u(x) = u_0$, $v(x) = v_0$, $s(x) = s_0$.

Задача 4. Найдите $K(x)(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$ по матрице связности $\theta(v)$.

Задача 5. Для локальных координат $(x_1, ...x_n)$ в области U на базе векторного расслоения и матрице связности в U найти горизонтальное векторное поле v_i, проецирующееся в $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Задача 6. Найти коммутатор $[v_i, v_j]$ векторных полей из предыдущей задачи.

Задача 7. Доказать, что кривизна выражается через матрицу связности следующим образом: $K = d\theta + \theta \wedge \theta$.

Задача 8. Доказать, что матрица кривизны в данной тривиализации удовлетворяет соотношению: $dK = K \wedge \theta - \theta \wedge K$.

Задача 9. Проверьте, что форма $tr(K)$ замнута.