Листок 7. 29 апреля 2013

Задача 1. В локальных координатах $(x_1, ..., x_n)$ на многообразии заданы коэффициенты матрицы связности $\theta_i^j = \sum \Gamma_{i,k}^j dx_k$ на касательном расслоении к этому многообразию. Докажите, что связность на касательном расслоении симметрична если и только если $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$.

Задача 2. Рассмотрим вложение $x \to (x, x^2)$ прямой в евклидову плоскость (в ортогональных координатах на плоскости).
а) Найдите результат параллельного переноса касательного вектора $\frac{\partial}{\partial x}$ в точке 0 в точку 1 для связности Леви-Чивита в индуцированной метрике на прямой. Зависит ли этот перенос от пути, соединяющего точки 0 и 1?
б) Найдите символ Кристоффеля этой связности.

Задача 3. Пусть $u(t_1, t_2)$ поверхность в римановом многообразии, v - векторное поле вдоль этой поверхности. Докажите, что $[\frac{D}{dt_1}, \frac{D}{dt_2}]v = R(\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2})v$.

Задача 4. Верно ли, что диаметр геодезически полного связного риманова многообразия бесконечен?

Задача 5. Докажите, что из каждой точки некомпактного геодезически полного риманова многообразия можно выпустить геодезический луч, такой что любой его отрезок минимален.

Задача 6. Докажите, что касательное векторное поле к геодезической вариации есть поле Якоби вдоль исходной геодезической. Верно ли обратное?

Задача 7. Выясните, постоянно ли вдоль геодезической скалярное произведение поля Якоби и касательного вектора к геодезической.