

Квантовая теория поля

Листок 5. Фейнмановские диаграммы в 0-мерных теориях.

Обязательные задачи: 1а, 1б, 1в, 2а, 2б, 3д.

1. Пусть B — положительно определенная матрица размера $d \times d$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Во всех задачах интегрирование производится по $\mathbb{R}^d$, если не указано противное.

а) Докажите, что

$$\int e^{-\frac{1}{2}(Bx, x)} dx = \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{\det B}}.$$

б) Обозначим

$$\langle f(x) \rangle := \sqrt{\frac{\det B}{(2\pi)^d}} \int f(x) e^{-\frac{1}{2}(Bx, x)} dx.$$

Пусть $C := B^{-1}$. Докажите, что $\langle x_i \rangle = 0$, $\langle x_i x_j \rangle = c_{ij}$. Матрица C называется матрицей ковариаций или пропагатором.

в) Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = (2n-1)!!.$$

2. Пусть $l_1, l_2, \dots, l_{2n}$ — линейные функции от $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$, а $\langle \cdot \rangle$ — то же, что и в предыдущей задаче.

а) Докажите формулу Вика:

$$\langle l_1 l_2 \dots l_{2n} \rangle = \sum \langle l_{p_1} l_{q_1} \rangle \dots \langle l_{p_n} l_{q_n} \rangle,$$

где сумма берется по всем возможным спариваниям на множестве $\{1, 2, \dots, 2n\}$.

б) Применяя формулу Вика, найдите $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-x^2/2} dx$.

3. Обозначим

$$Z := h^{-d/2} \int e^{-S(x)/h} dx, \quad Z_0 := \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{\det B}}.$$

а) Докажите «теорему Фейнмана»:

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{\Gamma \in G_{\geq 3}} \frac{h^{b(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} F(\Gamma)$$

(равенство понимается в смысле равенства формальных степенных рядов от h). Здесь

$$S(x) = \frac{b^{ij}}{2} x_i x_j + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{b^{i_1 \dots i_m}}{m!} x_{i_1} \dots x_{i_m},$$

$G_{\geq 3}$ — множество классов изоморфности графов с вершинами только валентности ≥ 3 (графу разрешено иметь кратные ребра и петли), $\text{Aut}(\Gamma)$ — группа автоморфизмов графа Γ , $b(\Gamma)$ — количество ребер минус количество вершин графа Γ , а фейнмановская амплитуда $F(\Gamma)$ определяется следующим образом. В каждую m -валентную вершину графа Γ ставится тензор $-B_m$, и берется свертка этих тензоров матрицей ковариаций по ребрам графа Γ — получившееся число обозначается $F(\Gamma)$. Если граф не связный, то его амплитуда определяется как произведение амплитуд всех компонент связности. Амплитуда пустого графа по определению равна 1. Под автоморфизмом графа понимается перестановка его и вершин, и ребер, сохраняющая графовую структуру. Докажите также следующее небольшое обобщение этого утверждения: если

$$S(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g_m}{m!} b^{i_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}, \quad g_m \in \mathbb{R},$$

то

$$\frac{Z}{Z_0} = \sum_{\bar{n}} \left(\prod_m g_m^{n_m} \right) \sum_{\Gamma \in G(\bar{n})} \frac{h^{b(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} F(\Gamma),$$

где $\bar{n} = (n_0, n_1, \dots)$ — последовательность неотрицательных целых чисел (только конечное число из которых отличаются от 0), а $G(\bar{n})$ — множество классов изоморфности графов с n_0 0-валентными вершинами, n_1 1-валентными вершинами и т.д..

б) Выведите отсюда, что

$$\ln(Z/Z_0) = \sum_{\Gamma \in G_{\geq 3}^c} \frac{h^{b(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} F(\Gamma),$$

где $G_{\geq 3}^c$ — множество классов изоморфности *связных* графов с вершинами только валентности ≥ 3 . Для связного графа Γ число $b(\Gamma) + 1$ называется количеством петель графа Γ .

в) Обозначим

$$(\ln(Z/Z_0))_l := \sum_{\bar{n}} \left(\prod_m g_m^{n_m} \right) \sum_{\Gamma \in G_{(l)}^c(\bar{n})} \frac{F(\Gamma)}{|\text{Aut}(\Gamma)|}$$

— l -петлевая часть пертурбативного разложения. Здесь $G_{(l)}^c(\bar{n})$ — множество классов изоморфности связных графов с вершинами требуемых валентностей и l петлями. Докажите, что

$$(\ln(Z/Z_0))_0 = -S(x_0), \quad (\ln(Z/Z_0))_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{\det B}{\det S''(x_0)},$$

где x_0 — невырожденный единственный глобальный максимум функции $S(x)$.

- г) Выведите из утверждения 3а теорему Фейнмана для корреляционных функций:

$$\int l_1(x) \dots l_n(x) e^{-S(x)/h} dx = \sqrt{\frac{(2\pi h)^d}{\det B}} \sum_{\Gamma \in G_{\geq 3}(n)} \frac{h^{b(\Gamma)}}{|\text{Aut}(\Gamma)|} F(\Gamma; l_1, \dots, l_n).$$

Здесь $G_{\geq 3}(n)$ — множество классов изоморфности графов с n одновалентными «внешними» вершинами, пронумерованными числами $1, \dots, n$ и конечным числом нenumерованных «внутренних» вершин валентности ≥ 3 , а фейнмановская амплитуда $F(\Gamma; l_1, \dots, l_n)$ определяется следующим образом. В j -ую внешнюю вершину графа Γ ставится ковектор l_j , в каждую внутреннюю m -валентную вершину графа Γ ставится тензор $-B_m$, и берется свертка этих тензоров матрицей ковариаций по ребрам графа Γ — получившееся число обозначается $F(\Gamma; l_1, \dots, l_n)$.

- д) Убедитесь, что формула Вика — частный случай задачи 3г.

4. Докажите теорему Кэли: количество деревьев с n пронумерованными вершинами равно n^{n-2} . *Подсказка:* примените задачу 3в к $S(x) = \frac{x^2}{2} - ge^x$.