Уравнения в частных производных

Вопросы к экзамену за 4 модуль для 3 курса

1. Привести постановку смешанной краевой задачи для уравнения теплопроводности. Доказать теорему о существовании классического решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье для гладкой финитной начальной функции. Построить функцию Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности. Доказать принцип максимума для классического решения уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Доказать теорему о единственности и непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начальных данных. [2, § 3.1, 3.2], [3, Лекция 13], [4, § 6.8], [1, § 6.3].

2. Доказать свойства функции Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности: неотрицательность и оценка сверху интеграла по отрезку $[0, l]$. Дать физическую интерпретацию функции Грина уравнения теплопроводности. Доказать теорему о сходимости классических решений первой краевой задачи для уравнения теплопроводности к обобщенному решению этой задачи. Доказать теорему о существовании и единственности решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности для непрерывной начальной функции. [2, § 3.2], [3, Лекция 14].

3. Доказать теорему о существовании классического решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями методом Фурье для гладкой финитной функции $f(x, t)$. Выразить это решение через функцию Грина. Доказать теорему о существовании "обобщенного" решения для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми краевыми условиями для непрерывной функции $f(x, t)$ с помощью функции Грина. [2, § 3.3], [3, Лекция 14], [1, § 6.3].

4. Доказать теорему единственности и непрерывной зависимости классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в полосе $D = \{(x, t) : \ x \in \mathbb{R},\ 0 < t \leq T\}$ в классе ограниченных функций. Свойства преобразования Фурье в пространстве Шварца: преобразование операторов дифференцирования и умножения на полиномы. Доказать теорему о том, что преобразование Фурье отображает пространство Шварца в себя. Доказать формулу обращения преобразования Фурье в пространстве Шварца. [2, § 3.4, 4.1].

5. Построить класс ограниченных решений однородного уравнения теплопроводности с помощью метода разделения переменных с последующим интегрированием частных решений по спектральному параметру (без полного обоснования). Применить преобразование Фурье при выводе формулы Пуассона для решений уравнения теплопроводности из пространства Шварца. Построить функцию Грина для уравнения теплопроводности на всей оси. Доказать теорему существования ограниченного решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности для ограниченной и непрерывной начальной функции, используя формулу Пуассона. [2, § 4.2], [3, Лекция 15], [4, § 6.4].

6. Привести формулу Пуассона в n-мерном случае. Доказать, что эта формула задает решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве $\mathbb{R}^n$. Привести формулу для решения неоднородного одномерного уравнения теплопроводности с нулевой начальной функцией и обосновать ее, воспользовавшись принципом Дюамеля и формулой Пуассона. Построить с помощью формулы Пуассона решение первой и второй краевой задачи на полупрямой. [2, § 4.2], [3, Лекция 16], [4, § 6.5].

7. Дать определение линейного уравнения с частными производными, корректного по Петровскому. Привести примеры корректных и некорректных уравнений по Петровскому. Вывести формулу для решения одномерного уравнения Шредингера на всей оси. [2, § 4.2].

8. Привести формулу Кирхгофа для решения однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ с начальными данными $\varphi = 0$ и $\psi \neq 0$ и проверить, что она дает решение этой задачи Коши. Доказать формулу Кирхгофа для случая $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$. Вывести из принципа Дюамеля и формулы Кирхгофа формулу решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными данными. [2, § 5.1, 5.2, 5.3], [5, § 5.1.2, 5.1.6].

9. Вывести методом спуска формулу Пуассона для решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Вывести из формулы Кирхгофа теорему о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения. Доказать теорему о непрерывной зависимости классического решения задачи Коши от начальных данных и правой части волнового уравнения. Область зависимости решений волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, конечная скорость распространения волн, передний и задний фронт волны. Особенности распространения волн в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^1$. [2, § 5.4], [5, § 5.1.3, 5.1.5].

10. Привести формула интегрирования по частям и дать определение обобщенных производных по Соболеву. Доказать, что классические производные являются также обобщенными. Доказать единственность обобщенной производной. Дать определение пространства Соболева $H^1(\Omega)$. Доказать полноту пространства $H^1(\Omega)$. Дать определение пространства Соболева $H_0^1(\Omega)$. Доказать неравенство Фридрихса. Вывести из неравенства Фридрихса эквивалентность норм в $H_0^1(\Omega)$. [5, § 1.1, 1.2], [4, § 7].

11. След функции из $H_0^1(\Omega)$ на гиперпространстве как функции из $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$. Доказать теорему о непрерывном продолжении оператора следа в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$ до пространства $H_0^1(\Omega)$. Доказать теорему о непрерывной зависимости в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ оператора следа на гиперпространстве. Привести интегральную интерпретацию условия равенства нулю функций из $H_0^1(\Omega)$ на границе области $\partial\Omega$. [5, § 3.13.1], [4, § 7].

12. Дать определение классического и обобщенного решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Доказать теорему о существовании и единственности обобщенного решения этой задачи с помощью теоремы Рисса. [5, § 3.13], [4, § 7].

13. Сформулировать вариационный принцип. Доказать свойства функционала $\Phi(u)$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$: непрерывность, ограниченность снизу, эквивалентность точки минимума обобщенному решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона, сходимость любой минимизирующей последовательности в $H_0^1(\Omega)$. Доказать разрешимость вариационной задачи для $\Phi(u)$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. [5, § 3.13.3].

14. Задача Дирихле с неоднородными граничными условиями. Доказать теорему о существовании и единственности обобщенного решения этой задачи. [5, § 3.13.4].

Список литературы

[1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.

[2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.

[3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.

[4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.

[5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными.–М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

Порядок проведения экзамена

Экзамен проводится в письменной форме. Он будет состоять из двух частей: теоретической и практической. Теоретическая часть рассчитана на 1 час. Каждый студент получит билет из трех вопросов, взятых из разных пунктов приведенного выше списка. Необходимо достаточно подробно осветить каждый вопрос, привести относящиеся к нему определения, сформулировать требуемые свойства и теоремы, а также доказать их. Дополнительными материалами пользоваться не разрешается. Практическая часть будет проходить 2 часа. Каждый студент получит вариант с задачами, которые необходимо решить. Здесь разрешается пользоваться дополнительными рукописными материалами (записками лекций, семинаров и пр.) Оценка каждого студента будет определяться по результатам проверки экзаменационной работы, с учетом накопленных баллов за решений задач листков, участие в семинарах.