Весна 2013

1. Задача об эволюции начального состояния в квантовой теории. Ядро оператора эволюции в координатном представлении, его выражение через континуальный интеграл в фазовом пространстве
$$\langle Q_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|Q_i\rangle = \int_{\substack{Q(t)=Q_f \\ Q(0)=Q_i}} \mathcal{D}P(\tau)\mathcal{D}Q(\tau)\ \exp\Big[\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\,[P(\tau)\dot{Q}(\tau) - H(P(\tau),Q(\tau))]\Big].$$
Решеточная аппроксимация континуального интеграла. Принцип наименьшего действия в гамильтоновом формализме.

2. Файнмановский интеграл по траекториям в нерелятивистской квантовой механике ($\hat{H} = \hat{p}^2/2m + U(\hat{q})$):
$$\langle Q_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|Q_i\rangle = \int_{Q(t)=Q_f, Q(0)=Q_i} \mathcal{D}Q(\tau)\ \exp\Big[\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{d}\tau\,\Big[\frac{m}{2}\dot{Q}^2(\tau) - U(Q(\tau))\Big]\Big],$$
его решеточная аппроксимация.

3. Интеграл по траекториям в нерелятивистской квантовой механике. Вычисление методом преобразования Фурье. Амплитуда перехода (по отношению к этой же величине для свободной частицы)
$$\frac{\langle Q_f=0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|Q_i=0\rangle}{\langle Q_f=0|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}_0}|Q_i=0\rangle} = \frac{\int_{Q(t)=Q(0)=0}\mathrm{DQ}(\tau)\ \exp\Big[\mathrm{i}\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{d}\tau\,\Big[\frac{\mathrm{m}}{2}\dot{\mathrm{Q}}^2(\tau) - \mathrm{U}(\mathrm{Q}(\tau))\Big]_{\mathrm{FT}}\Big]}{\int_{Q(t)=Q(0)=0}\mathrm{DQ}(\tau)\ \exp\Big[\mathrm{i}\int_0^{\mathrm{t}}\mathrm{d}\tau\,\Big[\frac{\mathrm{m}}{2}\dot{\mathrm{Q}}^2(\tau)\Big]_{\mathrm{FT}}\Big]},$$
где индекс FT в лагранжиане означает взятие фурье-образа от траектории, а интегрирование по траекториям $\mathrm{DQ}(\tau)$ - интегрирование по счетному набору коэффициентов Фурье C_n траектории: $\mathrm{DQ}(\tau) = \prod_{\mathrm{n}=1} \mathrm{dC_n}$.

4. Вычисление амплитуды перехода для гармонического осциллятора с постоянной частотой методом континуального интегрирования. Индекс Морса-Маслова.

5. Вычисление амплитуды перехода для гармонического осциллятора с переменной частотой методом континуального интегрирования. Формула Гельфанда-Яглома.

6. Вычисление континуального интеграла в квазиклассическом приближении:
$$\langle Q_f|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\hat{H}}|Q_i\rangle_{QuasiClassic} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{-\frac{\partial^2 S_{cl}[Q_f,Q_i,t]}{\partial Q_f \partial Q_i}}\exp\big[\mathrm{i}S_{cl}[Q_f,Q_i,t]\big].$$

7. Ядро оператора эволюции в голоморфном представлении, его выражение через континуальный интеграл и вычисление для гармонического осциллятора с постоянной частотой.

8. Квантование системы тождественных частиц. Пространство состояний для бозонов и фермионов. Фоковское пространство состояний, его представление через числа заполнения.

9. Операторы рождения и уничтожения в фоковском пространстве состояний для бозонов и фермионов. Их коммутационные (антикоммутационные) соотношения. Представление одночастичных (с выводом) и двухчастичных (без вывода) операторов через операторы рождения и уничтожения.

10. Квантовая теория свободных релятивистских частиц. Гамильтониан, оператор полного импульса и числа частиц. Представление Гайзенберга динамики квантовой теории.

11. Бозоны. Голоморфное представление фоковского пространства и операторов, действующих на нем. Ядро оператора эволюции в голоморфном представлении и его выражение через континуальный интеграл.

12. Фермионы. Представление фоковского пространства и операторов, действующих на нем через грассмановы переменные. Элементарный анализ грассмановых переменных: определение, функции от грассмановых переменных, производные, дифференциалы, интегрирование, линейная замена переменных.

13. Эквивалентность квантовой теории невзаимодействующих релятивистских частиц без внутренних степеней свободы и квантовой теории действительного скалярного поля с действием

$$S_{field} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^d x \, [\partial_\mu \phi(x^\nu)\partial^\mu \phi(x^\nu) - m^2\phi^2(x^\nu)], \quad x^\mu = (\tau, x^i), i = 1, \ldots, d.$$

14. Комплексное скалярное поле, его квантование. Частицы и античастицы. Использование симметрий теории для введения взаимодействия в теории поля. Калибровочные поля (U(1)).

15. Квантовая теория спинорного поля в трехмерном пространстве. Связь спина со статистикой (общее понимание утверждения без доказательства).

16. Вычисление статистической суммы большого канонического ансамбля для бозонов (B) и фермионов (F) методом континуального интегрирования:

$$Z_{\substack{B\\F}} = \int_{\bar\alpha(\beta)=\pm\bar\alpha(0)} \mathcal{D}\bar\alpha(\tau)\mathcal{D}\alpha(\tau)\exp\Big[\int_0^\beta \mathrm{d}\tau\,\big(\dot{\bar\alpha}\alpha - H_\mu(\bar\alpha,\alpha)\big)\Big].$$

Статистические суммы невзаимодействующих бозонов и фермионов.

17. S-матрица, определение, связь с задачей рассеяния. Выражение для нормального символа S-матрицы через континуальный интеграл

$$S(\bar\alpha_p,\alpha_p) = \lim_{\substack{t_f\to+\infty\\ t_i\to-\infty}} \prod_p \mathrm{e}^{-\bar\alpha_p\alpha_p} \int_{\substack{\bar\alpha_p(t_f)=\bar\alpha_p \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_f\varepsilon_p}\\ \alpha_p(t_i)=\alpha_p\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_i\varepsilon_p}}} \mathcal{D}\bar\alpha_p(\tau)\mathcal{D}\alpha_p(\tau)$$
$$\exp\Big[\bar\alpha_p(t_i)\alpha_p(t_i) + \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}\tau\,\big(\dot{\bar\alpha}_p\alpha_p - \mathrm{i}H(\bar\alpha_p,\alpha_p)\big)\Big].$$

18. S-матрица в теории возмущений. Асимптотический характер рядов теории возмущений. Вычисление S-матрицы свободной теории скалярного поля в присутствии внешнего источника. Выражение для S-матрицы в теории возмущений

$$S[\phi_0(\mathrm{x})] = \exp\Big[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}\, V\Big[\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta j(\mathrm{x})}\Big]\Big]$$
$$\exp\Big[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\,\phi_0(\mathrm{x}_1)j(\mathrm{x}_1) + \mathrm{i}\int \mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_2\mathrm{d}^{d+1}\mathrm{x}_1\,\frac{1}{2}j(\mathrm{x}_2)D_c(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)j(\mathrm{x}_1)\Big]\Big|_{j=0}.$$

19. Первый порядок теории возмущений для теории действительного скалярного поля с взаимодействием ϕ^4. Расходимости, перенормировка массы.

20. Второй порядок теории возмущений для теории действительного скалярного поля с взаимодействием ϕ^4. Правила диаграммной техники Файнмана.

21. Функции Грина в квантовой теории действительного скалярного поля, их производящий функционал. Выражение для S-матрицы через функции Грина.