

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ПО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Аффинные алгебраические многообразия и алгебры регулярных функций, регулярные отображения и гомоморфизмы алгебр (эквивалентность этих категорий). Спектр кольца, топология Зариского, теорема Гильберта о нулях (повторение). Первые примеры аффинных схем и их склейки. Квазипроjektивные многообразия, поля рациональных функций, рациональные отображения. (Шафаревич, начало 1 тома)

2. Предпучки и пучки на топологических пространствах, слой, накрывающее (или этальное) пространство, пучок, ассоциированный с предпучком. Структурный пучок на спектре кольца. (Манин 2.1-2.3, Хартсхорн II.1-II.2)

3. Понятие окольцованного пространства и морфизма таковых. Определение схемы. Склейка схем. ((Манин 2.4-2.5, Шафаревич начало 2 тома, Хартсхорн II.2)

4. Proj градуированного кольца как пример схемы. Примеры (проективное пространство, раздутие идеала). Манин 2.4, 2.6, Хартсхорн II.2

5. Многочлен Гильберта градуированного кольца. Степень и размерность проективного многообразия. Пересечение в аффинном и проективном пространстве. Теорема Безу. Манин 2.7, 2.8, Хартсхорн I.7

6. Релятивизация: схемы над другими схемами. Отображения в аффинную схему соответствуют гомоморфизмам колец функций. Точки схемы со значениями в алгебре. Открытые и замкнутые вложения. Замкнутые подсхемы. Хартсхорн II.3, Liu 2.3.2

7. Условия конечности (нетеровы схемы, морфизмы конечного типа, конечные морфизмы). Расслоенное произведение. Замена базы, сохранение некоторых свойств при ней. Хартсхорн II.3, Liu 2.3.4, 3.1.1

8. Приведенность и неприводимость. Целые схемы и их общие точки. Доминантные морфизмы целых схем. Отделимые и собственные морфизмы. Валюативный критерий (без доказательства). Хартсхорн II.4, Liu 3.2, 3.3

9. Собственность проективных морфизмов. Регулярные кольца и неособые многообразия. Нормальные многообразия. Liu 4.1, 4.2, Хартсхорн I.5

10. Пучки модулей, прямой и обратный образ. "Пучковизация" модуля (как пучок на спектре кольца). (Квази)когерентные пучки. Пучок идеалов подсхемы. Соответствие между замкнутыми подсхемами и пучками идеалов. Манин 2.9, 2.10, Хартсхорн II.5

11. Пучки на проективном спектре ("пучковизация" модуля над гра-

дуированным кольцом). Пучок $\mathcal{O}(1)$ на $\text{Proj}(\mathbb{R})$. Глобальные сечения пучков $\mathcal{O}(n)$. Лемма о продолжении сечений. Обратимые пучки, порожденные глобальными сечениями, и отображения в проективное пространство. Манин 2.15, Хартсхорн II.5, II.7 (начало)

12. Обильные и очень обильные обратимые пучки. Группа Пикара. Дивизоры Картье и обратимые пучки. Линейная эквивалентность. Дивизоры Вейля. Примеры: группа Пикара спектра кольца, проективного пространства. Хартсхорн II.6, II.7 (первая половина), Манин 2.11

13. Когомологии пучков как производные функторы от функтора глобальных сечений, длинная точная последовательность когомологий. Вялые пучки и вялые резольвенты. Обращение в нуль когомологий квазикогерентных пучков на аффинных схемах. Хартсхорн III.1-3 (местами)

14. Когомологии Чеха. Вычисление когомологий квазикогерентных впучков с помощью комплекса Чеха. Хартсхорн III.4

15. Когомологии обратимых пучков на проективном пространстве. Теорема Серра об обращении в нуль и ее обращение (когомологический критерий обильности). Эйлерова характеристика и многочлен Гильберта. Арифметический род. Хартсхорн III.6, Манин 2.16

16. Линейная система как проективизация пространства сечений обратимого пучка. Вложение в проективное пространство посредством линейной системы

(разделение точек и касательных векторов). Формула Римана-Роха для кривых. Хартсхорн II.7, IV.1

17. Пучок дифференциалов. Канонический класс. Двойственность Серра для

гладких многообразий (без доказательства). Теорема Римана-Роха для кривых, геометрические следствия. Пересечения и формула Римана-Роха на поверхности (факультативно). Хартсхорн II.8, IV.1

Шафаревич: "Основы алгебраической геометрии"

Манин: "Введение в теорию схем и квантовые группы"

Хартсхорн: "Алгебраическая геометрия"

Liu: "Algebraic geometry and arithmetic curves"