КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

С.М. Натанзон

Contents

1. Голоморфные функции.

1.1. **Комплексная производная.** Далее под *областью* мы понимаем открытое связное подмножество. Соответствие $(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$ между вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ и комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ позволяет рассматривать комплексно-значную функцию комплексного переменного как:

- отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(z)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (обозначение $w = f(x, y)$).
- отображение области вещественной плоскости $D \subset \mathbb{R}^2$ в вещественную плоскость $\mathbb{R}^2$ (обозначение $(u, v) = f(x, y)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$).

Далее мы будем часто переходить от одной интерпретации к другой.

Определение 1.1. *Пусть f — отображение области комплексной плоскости $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и $z_0 \in D$. Если предел $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ существует и конечен, то говорят, что $f'(z_0)$ есть комплексная производная f в точке z_0.*

Рассмотрим теперь f как отображение области вещественной плоскости в вещественную плоскость. Тогда частная производная f по любому направлению будет также совпадать с $f'(z_0) = f'(x_0, y_0)$. Таким образом,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0+\Delta x, y_0) + iv(x_0+\Delta x, y_0)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0),$$
$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x_0, y_0+\Delta y) + iv(x_0, y_0+\Delta y)) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(z_0).$$

Равенство этих строк влечет

Лемма 1.1. *Если f имеет комплексную производную в z_0, то в этой точке выполнены*

$$\boxed{\text{Условия Коши-Римана (Cauchy-Riemann): } \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0); \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).}$$

Введем теперь важные обозначения.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}); \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})}$$

Другими словами,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + i\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u+iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Таким образом,

Лемма 1.2. *Если функция f имеет комплексную производную в точке z_0, то $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) = 0$ и $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.*

1.2. **Дифференциал комплексной функции.**

Лемма 1.3. *Если функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0) как отображение области вещественной плоскости в $\mathbb{R}^2$.*

Proof. Положим
$$\alpha(\Delta z) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0).$$
Тогда $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x + i\Delta y) + \alpha(\Delta z)\Delta z = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right) + \alpha(\Delta z)\Delta z$

Следовательно, $(u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y), v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - (u(x_0, y_0), v(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(|\Delta z|)$. □

Теорема 1.1. *Функция $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеет комплексную производную в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если и только если соответствующее отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо и удовлетворяет условиям Коши-Римана.*

Proof. Пусть отображение $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ дифференцируемо в точке (x_0, y_0). Тогда $u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|)$ и $v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)) - v(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|)$

Поэтому для $\mathbb{R}^2 \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ имеем
$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x + i\Delta y) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + iv)\right](\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\Delta x - i\Delta y) + o(|\Delta z|). \end{aligned}$$
Если отображение f удовлетворяет условиям Коши–Римана, то согласно вычислениям предыдущего раздела $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$, и, следовательно,
$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(|\Delta z|),$$
то есть функция f имеет комплексную производную в z_0.

Обратное утверждение следует из лемм 1.1 и 1.3. □

Теорема 1.2. *Пусть функции $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f,g} \mathbb{C}$ имеют комплексные производные в точке z_0. Тогда функции $f \pm g, f \cdot g$ и $\frac{f}{g}$ (если $g(z_0) \neq 0$) имеют* *комплексные производные в точке z_0, причем $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, $(\frac{f}{g})'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$.*

Теорема 1.3. *Пусть $\mathbb{C} \supset D \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}$, причем функция f имеет комплексную производную в точке z_0, а g — в точке $f(z_0)$. Тогда функция $\phi(z) = g(f(z))$ имеет комплексную производную в z_0 и $\phi'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$.*

Задача 1.1. *Доказать теоремы 1.2 и 1.3. Эти доказательства дословно повторяют доказательства соответствующих теорем вещественного анализа.*

1.3. **Голоморфность.**

Определение 1.2. *Говорят, что функция $D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}$, если она имеет комплексную производную в каждой точке $z \in D$. Говорят, что функция f голоморфна в точке z_0, если она голоморфна в некоторой окрестности $V \ni z_0$ точки z_0.*

Примеры голоморфных функций:
1. $f(z) = const$, $f'(z) = 0$.
2. $f(z) = az$, где $a \neq 0$. Если $a = re^{i\phi}$, то f поворачивает плоскость $\mathbb{C}$ на угол ϕ вокруг точки 0 и растягивает плоскость в r раз.
3. $f(z) = z^n$. Функция f увеличивает угол между лучами, выходящими из точки 0, в n раз.

Задача 1.2. *Если $f'(z) = 0$ на всей на области $D \subset \mathbb{C}$, то $f = const$ на D.*

Если $f'(z_0) \neq 0$, то в малой окрестности точки z_0 функция f действует почти так, как в примере 2, то есть

Задача 1.3. *Пусть $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что функция f сохраняет величину угла между кривыми, пересекающимися в z_0.*

Определение 1.3. *Отображения, сохраняющие величину угла, называются конформными.*

Как и в вещественном случае, можно рассматривать последовательности и ряды комплексных функций $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Все определения и теоремы дословно переносятся на комплексный случай, если вместо интервала $\{x \in \mathbb{R} | |x - x_0| < r\}$ рассматривать диск $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\}$.

Задача 1.4. *Доказать, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z)$ сходится равномерно в области $D \subset \mathbb{C}$, а ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$ сходится хотя бы в одной точке области, то ряд $f(z)$ сходится равномерно в области D и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n(z)$.*

Нас будут интересовать в основном степенные ряды $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Задача 1.5. *Пусть $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Тогда степенной ряд $f(z)$ абсолютно сходится на $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\}$ и расходится на $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| > R\}$. На любом компакте $K \subset D$ ряд $f(z)$ сходится равномерно.*

Положим:

$$e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$
$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Задача 1.6. *Доказать, что функции $e^z, \cos z, \sin z$ существуют и голоморфны на всей плоскости $\mathbb{C}$. Найти для каждой из функций область D такую, что $f(D) = \mathbb{C}$.*

1.4. **Комплексное интегрирование.** Под *кривой* (или *путем*) мы будем понимать ориентированный образ кусочно-гладкого отображения отрезка $[\alpha, \beta]$ в плоскость $\mathbb{C}$. Замкнутая кривая называется *контуром.* В вещественном случае интеграл по кривой — это предел при $\max \Delta z_k \to 0$ интегральных сумм $S = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_k) \Delta z_k$, где ξ_k — точки, разбивающие кривую γ, а Δz_k — отрезки, соединяющие эти точки. Если формально считать аргумент и функцию комплексным числом, то получится комплексный интеграл по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$. При этом

$$S = \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k) + iv(\xi_k)\big)(\Delta x + i\Delta y) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \big(u(\xi_k)\Delta x_k - v(\xi_k)\Delta y_k\big) + i\big(u(\xi_k)\Delta y_k + v(\xi_k)\Delta x_k\big).$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению

Определение 1.4. *Интегралом функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по кривой $\gamma \subset \mathbb{C}$ называется комплексное число*
$$\int_\gamma f(z)\, dz \stackrel{def}{=} \int_\gamma (udx - vdy) + i \int_\gamma (udy + vdx).$$

Если $w : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — гладкая параметризация кривой γ и $w(t) = x(t) + iy(t)$, то

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta \big(u(w(t))x'(t)dt - v(w(t))y'(t)dt\big) +$$
$$+ i \int_\alpha^\beta \big(u(w(t))y'(t)dt + v(w(t))x'(t)dt\big) = \int_\alpha^\beta f(w(t))w'(t)dt.$$

В частности, правая часть не зависит от параметризации $w(t)$.

Пример 1.1. *Пусть $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - a| = r\} = \{a + re^{it} | t \in [0, 2\pi]\}$. Тогда*
$$\int_\gamma (z-a)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Пример 1.2. *Пусть $n \neq -1$ и $\gamma \subset \mathbb{C}$ — путь из a в b. Рассмотрим его параметризацию $w = w(t)$. Тогда*

$$\int_\gamma z^n dz = \int_\alpha^\beta w^n(t) w'(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_\alpha^\beta \left(\frac{d}{dt}(w^{n+1}(t))\right) dt =$$
$$= \frac{1}{n+1}(w^{n+1}(\beta) - w^{n+1}(\alpha)) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Через $\int_\gamma |f||dz|$ будет обозначаться интеграл по длине дуги $\int_\alpha^\beta |f||z'(t)|dt$.
Из определения очевидна

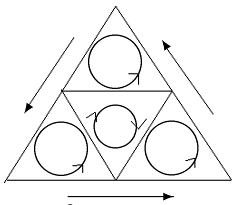
Теорема 1.4. *При изменении ориентации кривой γ интеграл меняет знак.*

$$\int_\gamma (af+bg)\,dz = a\int_\gamma f\,dz + b\int_\gamma g\,dz,\ \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz,$$

$|\int_\gamma f\,dz| \le \int_\gamma |f|\,|dz|$. *В частности, если $|f(z)| \le M$, то $|\int_\gamma f\,dz| \le M|\gamma|$, где $|\gamma|$ — длина дуги.*

1.5. **Теорема Коши.**

Лемма 1.4. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D. Тогда для любого треугольника $\Delta \subset D$ $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.*

Proof. 

Пусть $|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| = M > 0$. Разобьём Δ на 4 треугольника a_1, a_2, a_3, a_4 так, как это показано на рисунке. Тогда $M = |\sum_{i=1}^n \int_{\partial a_i} f(z)\,dz| \le \sum_{i=1}^n |\int_{\partial a_i} f(z)\,dz|$. Значит, для одного из треугольников $\Delta_1 \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ выполнено неравенство $|\int_{\partial\Delta_1} f\,dz| \ge \frac{1}{4}M$. Продолжая, находим последовательность треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ таких, что $|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz| \ge \frac{1}{4^n}M$.

Пусть $z_0 \in \bigcap \Delta_i \subset D$. Положим $\alpha(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|a(z)| < \varepsilon$ при $0 < |z - z_o| < \delta$. Пусть $\Delta_n \subset \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < \delta\}$, тогда согласно примеру 1.1:

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| =$$
$$= \left|\int_{\partial\Delta_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| \le \int_{\partial\Delta_n} |\,\alpha(z)|\,|\,z-z_0|\,|\,dz| \le \varepsilon\,|\,\partial\Delta_n|^2 =$$
$$= \varepsilon\left(\frac{|\,\partial\Delta|}{2^n}\right)^2 = \varepsilon\frac{|\,\partial\Delta|^2}{4^n}.$$

Таким образом, $\frac{1}{4^n}M \le \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\frac{|\partial\Delta|^2}{4^n}$ откуда $M \le \varepsilon\,|\partial\Delta|^2$ и, следовательно, $M = 0$. □

Теорема 1.5 (Коши). *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — замкнутый путь, гомотопный нулю. Тогда $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Proof. Контур γ ограничивает область Q. Если γ — ломаная, состоящая из отрезков, то область Q может быть разбита на конечное число треугольников $\Delta_i \subset D$. Согласно лемме 1.4, $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} f(z)\,dz = 0$. Интеграл по произвольному пути является пределом интегралов по ломаным. □

Замечание 1.1. *Для функций f с непрерывной производной $f'(z)$ теорему Коши можно доказывать, используя формулу Грина.*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial Q}(udx - vdy) + i\int_{\partial Q}(udy + vdx) =$$
$$= \iint\limits_Q \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint\limits_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

Такое доказательство не подходит однако для последовательного изложения комплексного анализа. Дело в том, что теорема Коши используется в дальнейшем для доказательства непрерывности производной любой голоморфной функции.

Теорема 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом замкнутых контуров. Тогда $\int_{\partial G} f(z)\,dz = 0$.*

Proof. Соединим граничные компоненты множества G отрезками $\delta_1, \dots, \delta_m \subset G$ таким образом, чтобы множество $\widetilde{G} = G \setminus \bigcup_{i=1}^m \delta_i$ стало односвязным (см.рисунок). Тогда согласно теореме 1.5

$$0 = \int_{\partial\widetilde{G}} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz.$$

□

1.6. **Первообразная.**

Определение 1.5. *Первообразной для функции $f(z)$ в области D называется голоморфная в D функция $F(z)$ такая, что $F'(z) = f(z)$.*

Задача 1.7. *Пусть F — первообразная для f. Доказать, что Φ — первообразная для f, если и только если $\Phi = F + const$.*

Лемма 1.5. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < r\}$. Тогда $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$ — первообразная для f в D.*

Proof. Пусть $z + h \in D$. Тогда, согласно лемме 1.4 и примеру 1.2:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[a,z+h]} f(w)\,dw \; - \int_{[a,z]} f(w)\,dw \; = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw \; =$$
$$= \int_{[z,z+h]} f(z)\,dw \; + \int_{[z,z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\,dw = f(z)h \; + \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))\,dw.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{1}{|h|}\int_{[z,z+h]} |\alpha(h)|\,|dh|,$$

где $\alpha(h) = f(z+h) - f(z)$. Ввиду непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое что $|\alpha(h)| < \varepsilon$ при $|h| < \delta$. Таким образом, $\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| \le \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon$ при $|h| < \delta$, то есть $F'(z) = f(z)$. □

Определение 1.6. *Пусть функция f голоморфна в области D. Первообразной f вдоль кривой $\gamma \subset D$ называется непрерывная функция $\Phi(z)$ на γ, являющаяся ограничением функции, первообразной к f в некоторой области $U \subset D$, содержащей γ.*

Теорема 1.7. *Пусть f голоморфна в области D и $\gamma \subset D$ — кривая без самопересечений с началом a и концом b. Тогда f имеет первообразную $\Phi(z)$ вдоль γ, причем $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\,dz$.*

Proof. Кривая γ является образом отрезка $[0,1]$ под действием непрерывной функции $z : [0,1] \to D$. Ввиду равномерной непрерывности функции z отрезок $[0,1]$ можно покрыть интервалами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ так, чтобы образ $z(\alpha_i)$ содержался в круге $D_i \subset D$, и $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, если и только если $|i - j| = 1$. Используя лемму 1.5, выберем на каждом диске D_i первообразную $\tilde{\Phi}_i(z)$. Согласно утверждению из задачи 1.7, эти первообразные можно выбрать таким образом, чтобы они совпадали на всех пересечениях дисков. Тогда на объединении дисков U возникнет нужная первообразная Φ. Равенство $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_\gamma f(z)\,dz$ следует из явной конструкции первообразной, использованной в лемме 1.5. □

Теорема 1.8. *Функция f, голоморфная в связной односвязной области D, имеет в этой области первообразную F, причем $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$ для любого пути $\gamma \subset D$ с началом a и концом в b.*

Proof. Пусть $a \in D$. Для $z \in D$ положим $F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$, где путь $\gamma_z \subset D$ соединяет a и z. Согласно теореме 1.5, определение не зависит от γ и, следовательно, корректно. Согласно лемме 1.5 и теореме 1.7 $F'(z) = f(z)$ и $\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$. □

1.7. Интегральная формула Коши.

Теорема 1.9 (о среднем). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Тогда*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$

Proof. Ввиду непрерывности функции f для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > \rho > 0$ такое что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| \leq \rho$. Положим $G_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq \rho\}$. Согласно теореме 1.6: $0 = \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} d$. Поэтому, согласно примеру 1.1,

$$f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz =$$
$$= f(z_0) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\rho} \frac{dz}{z - z_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Таким образом,

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G_\rho} \frac{\varepsilon}{\rho} |dz| = \varepsilon$$

и

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Подставляя $z = z_0 + re^{it}$, находим, что

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{re^{it}}\cdot(z_0+re^{it})'dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt. \quad \square$$

Теорема 1.10 (Формула Коши). *Пусть функция f голоморфна в области D и $G \subset D$ — компакт, ограниченный конечным числом контуров. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in G \setminus \partial G, \\ 0, & \text{если } z_0 \notin G. \end{cases}$$

Proof. Если $z_0 \notin G$, то утверждение следует из теоремы 1.6. Если $z_0 \in G \setminus \partial G$, то рассмотрим $U = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \le r\} \subset G \setminus \partial G$. Тогда по теоремам 1.9 и 1.6:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{z-z_0}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial(G\setminus U)}\frac{f(z)}{z-z_0}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(z)}{z-z_0}dz. \quad \square$$

1.8. **Разложение в ряд Тейлора.**

Теорема 1.11. *Пусть функция f голоморфна в области D и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < R\} \subset D$. Тогда функция f совпадает на G с суммой ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r < R\}$.*

Proof. Согласно теореме 1.6, c_n не зависит от выбора $r < R$. Пусть $z \in G$ и $|z - z_0| < r$. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}.$$

Если $w \in \gamma$, то

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{|z-z_0|}\left(\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|\right)^{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{|z-z_0|},$$

где $\rho = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Таким образом, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ мажорируется абсолютно сходящимся рядом и, следовательно, сходится равномерно по w на γ. Функция $f(w)$ ограничена на γ, и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ также сходится равномерно по w на γ. В частности, его можно почленно проинтегрировать, что по формуле Коши дает

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}dw =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(w)}{2\pi i}\frac{dw}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \quad \square$$

Теорема 1.12. *Пусть* $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$. *Тогда функция* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *существует и голоморфна в круге* $D = \{z \in \mathbb{C} | |z-z_0| < R\}$, *причем функция* $f'(z)$ *также голоморфна в* D.

Proof. Положим $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$. Ввиду

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R},$$

функция $\phi(z)$ определена на D и равномерно сходится на компактах в D. Значит, $\phi(z)$ можно почленно интегрировать по путям в D. Положим

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} \phi(w)dw = \int_{[z_0,z]} \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(w-z_0)^{n-1}dw =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[z,z_0]} (w-z_0)^{n-1}dw = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \frac{1}{n}(w-z_0)^n|_{w=z_0}^{w=z} = f(z) - c_0.$$

С другой стороны:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} \phi(w)\,dw = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n \int_{[z,z+h]} (w-z_0)^{n-1}dw =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(w-z_0)^n|_z^{z+h} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left[(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n\right] = h\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} + h^2 g(z).$$

Таким образом,

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1} = \phi(z).$$

Мы доказали, что $f'(z)$ существует и представляется рядом с теми же свойствами, что и $f(z)$. Следовательно, $f^{(2)}(z)$ тоже существует, то есть $f'(z)$ — голоморфна в D. □

1.9. **Критерий голоморфности.**

Теорема 1.13. *Пусть функция* f *голоморфна в области* D. *Тогда она имеет там комплексные производные всех порядков, они голоморфны и*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw \quad , \text{где } U = \{w \in \mathbb{C} | |w-z| \le r\} \subset D$$

Proof. Пусть $z_0 \in D$ и $G = \{z \in \mathbb{C} | |z-z_0| \le R\} \subset D$. Согласно теореме 1.11, функция $f(z)$ представляется на G в виде ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Поэтому согласно теореме 1.12, функция $f'(z)$ голоморфна на $G \setminus \partial G$. Повторяя рассуждение, доказываем голоморфность $f^{(n)}(z)$ при всех n. Повторяя рассуждение вещественного анализа, находим почленным дифференцированием, что $c_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$. Сопоставив с теоремой 1.11, получим формулы для $f^{(n)}(z)$. □

Теорема 1.14. *Пусть* $U = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| < r\}$ *и* $f : U \to \mathbb{C}$. *Тогда следующие 3 условия эквивалентны:*

(1) *функция* f *голоморфна в* U, *то есть имеет комплексную производную в каждой точке* U.

(2) *функция f непрерывна в U и интеграл по границе любого треугольника $\Delta \subset U$ равен 0.*

(3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ *на U.*

Proof. (1)⇒(2) — это теорема 1.5, (1)⇒(3) — это теорема 1.11, (3)⇒(1) — это теорема 1.12. Докажем
(2)⇒(1) (Теорема Морера). Положим $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$. Тогда $F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(w)\,dw$ и

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw - hf(z)\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{|h|}\left|\int_{[z,z+h]} (f(w)-f(z))dw\right| \leq \frac{1}{|h|}\max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|\cdot|h| = \max_{[z,z+h]}|f(w)-f(z)|.$$

Поэтому непрерывность функции f в точке z влечет дифференцируемость функции F в точке z и равенство $F'(z) = f(z)$. Таким образом, функция $F(z)$ — голоморфна на U. Согласно теореме 1.13, отсюда следует голоморфность функции $f(z)$. □

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, голоморфные функции определяются счетным множеством чисел. Эти числа определяются поведением функции в окрестности точки и, следовательно, поведение функции в окрестности точки определяет всю функцию. Более того, эти числа можно найти интегрированием по контуру, что иногда удобней, чем дифференцирование.

1.10. **Теорема Вейерштрасса.**

Теорема 1.15 (Вейерштрасс)**.** *Пусть функции $\{f_n(z)\}$ голоморфны в области D и ряд $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на любом компакте, лежащем в D. Тогда функция f голоморфна и $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$.*

Proof. Для произвольной точки $a \in D$ рассмотрим замкнутый диск $U = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| \leq R\} \subset D$. Если $\gamma \subset U$ — граница треугольника, то ввиду равномерной сходимости: $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,dz$ и, согласно теореме 1.14, $f(z)$ — голоморфна на U. Кроме того, согласно теореме 1.13,

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{f_n(z)}{(z-a)^2}dz = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(a).$$

□

Таким образом, в отличие от гладких функций вещественного переменного, множество голоморфных функций замкнуто относительно равномерного предела.

2. Мероморфные функции.

2.1. **Функции голоморфные в кольце. Ряды Лорана.** Перейдем теперь к изучению свойств функций, голоморфных в неодносвязных областях.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в кольце* $V = \{0 \leq r < |z-a| < R \leq \infty\}$. *Тогда на* V

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

и

$$\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z-a| = \rho\} \subset V.$$

Proof. Пусть $z \in V$ и $U = \{w \in V | \alpha \leq |w-a| \leq \beta\} \ni z$. По формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = f_\beta(z) - f_\alpha(z),$$

где

$$f_\beta(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\beta} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\beta} f(w) \frac{1}{(w-a)\left(1 - \frac{z-a}{w-a}\right)} dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\beta} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

$$f_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{w-z} dw = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} dw =$$

$$= -\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} dw =$$

$$= -\int_{\gamma_\alpha} \frac{f(w)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^{-(n+1)}}{(w-a)^{-n}} dw = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}. \quad \square$$

Определение 2.1. *Ряд* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *называется рядом Лорана с правильной частью* $\sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *и главной частью* $\sigma_2 = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$.

Теорема 2.2. *Ряд Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *задает функцию, голоморфную в кольце* $V = \{z \in \mathbb{C} | r < |z-a| < R\}$, *где* $r = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$ *и* $R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Proof. По теореме Абеля функция σ_1 и функция σ_2 сходятся равномерно на любом компакте в V. Поэтому по теореме Вейерштрасса функции σ_1 и σ_2 голоморфны в кольце V. $\square$

Теорема 2.3 (Неравенство Коши). *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *голоморфна в кольце* $V = \{z | r < |z-a| < R\}$ *и* $\gamma_\rho = \{z | |z-a| = \rho\} \subset V$.

$$\text{Тогда } c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \text{ и } |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \text{ где } M = \max_{\gamma_\rho} |f|$$

Proof. Согласно примеру 1.1,

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} = \int_{\gamma_\rho} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-a)^m \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i c_n$$

Таким образом, $|c_n| \leq \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{\rho^{n+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}$. □

Теорема 2.4 (Лиувилль). *Если функция голоморфна на всей плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Proof. Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ и $|f(z)| \leq M$. Тогда по неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для всех $\rho > 0$. □

2.2. **Изолированные особые точки.**

Определение 2.2. *Говорят, что $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\{z \in |0 < |z-a| < r\}$ точки a. Особая точка a называется устранимой, если $\lim_{z\to a} f(z) = A \in \mathbb{C}$, полюсом, если $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, и существенно особой в остальных случаях.*

Теорема 2.5. *Пусть a — изолированная особая точка функции $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$. Тогда*

(1) *Следующие условия эквивалентны: а) a — устранимая особая точка; б) $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a; в) $c_n = 0$ при $n < 0$.*
(2) *Следующие условия эквивалентны: а) a — полюс; б) существует $N < 0$ такое, что $c_N \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n < N$.*

Proof. 1. Очевидно, что из а) следует б) и из в) следует а). Докажем, что из б) следует в). Пусть $|f(z)| \leq M$ в некоторой окрестности точки a. Тогда согласно неравенству Коши $|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$ для любого $0 < \rho < 1$. Следовательно, $c_n = 0$ при $n < 0$, то есть из б) следует в).
2. Пусть a — полюс. Тогда в некоторой окрестности точки a $|f(z)| \neq 0$, и, следовательно, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ голоморфна. Согласно уже доказанному утверждению 1, отсюда следует, что $\phi(z) = (z-a)^{-N} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, где $c_0 \neq 0$ и $N < 0$. Таким образом, $f(z) = \frac{1}{\phi(z)} = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, где $b_0 \neq 0$. Обратное утверждение очевидно. □

Таким образом, голоморфная функция с устранимыми особыми точками превращается в голоморфную во всех точках, если правильно определить ее в особых точках.

Определение 2.3. *Если $f(z) = (z-a)^N \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ и $c_0 \neq 0$, то при $N > 0$ число N называется порядком нуля, а при $N < 0$ число $-N$ называется порядком полюса функции $f(z)$ в точке a.*

Задача 2.1. *Функция f имеет полюс порядка N в точке , если и только если функция f^{-1} имеет 0 порядка N в точке a.*

Теорема 2.6 (Сохоцкий). *Пусть a — существенная особая точка функции f и $A \in \mathbb{C} \cup \infty$. Тогда существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) \to A$.*

Proof. Пусть $A = \infty$. Тогда утверждение теоремы следует из неограниченности функции f в любой окрестности точки a. Пусть $A \in \mathbb{C}$. Тогда или 1) существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $f(a_n) = A$ или 2) существует проколотая окрестность точки a, где $f(z) \neq A$. В последнем случае, в этой окрестности функция $\phi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ голоморфна, и a — ее существенная особая точка. Значит, как уже доказано, существует последовательность $a_n \to a$ такая, что $\phi(a_n) \to \infty$. Но тогда $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(A + \frac{1}{\phi(a_n)}\right) = A$. $\square$

Определение 2.4. *Говорят, что ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если функция f — голоморфна в некоторой проколотой окрестности $\{R < |z| < \infty\}$ точки ∞. Для таких точек сохраняется та же классификация: устранимые особые точки, полюсы и существенно особые точки.*

Задача 2.2. *Точка ∞ — изолированная особая точка функции $f(z)$, если и только если 0 — изолированная особая точка функции $g(z) = f(z^{-1})$.*

Определение 2.5. *Функция, голоморфная на всей плоскости $\mathbb{C}$, называется целой. Если функция f не имеет в области $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ других точек неголоморфности, кроме устранимых особых точек и полюсов, то говорят, что функция f мероморфна на D.*

Задача 2.3. *Функция $f(z)$ — мероморфна на всей сфере $\overline{\mathbb{C}}$, если и только если она рациональна, то есть $f(z) = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^m + \ldots + b_m}$.*

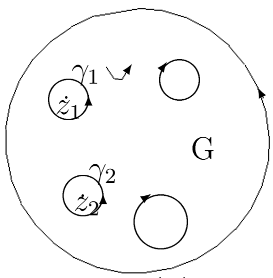
Это важное утверждение демонстрирует фундаментальную взаимосвязь между аналитическими свойствами функции и ее алгебраичностью.

2.3. **Вычеты и интегралы в смысле главного значения.** Далее, если не оговорено противное, все контуры считаются ориентированными против часовой стрелки.

Определение 2.6. *Пусть функция $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ определена в области U и $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| = r\} \subset U$. Тогда величина $\mathsf{res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz$ называется вычетом функции f.*

Теорема 2.7. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в области D всюду кроме изолированных особых точек, $G \subset D$ — компактное подмножество и его граница ∂G не содержит особых точек. Тогда $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f$, где сумма берется по всем особым точкам, принадлежащим G.*

Proof. Пусть $\gamma_j \subset G$ — попарно непересекающиеся замкнутые контуры, окружающие точки z_j (см.рисунок)



Тогда согласно теореме 1.6 и примеру 1.1,

$$\int_{\partial G} f(z)\, dz = \sum_j \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_j \mathsf{res}_{z_j} f.$$

$\square$

Определение 2.7. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ *голоморфна в области* $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| > R\}$ *и контур* $\gamma = \{z \in \mathbb{C} | |z| = r\} \subset U$ *ориентирован против часовой стрелки. Тогда величина* $\mathsf{res}_\infty f = -c_{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$ *называется вычетом функции* $f(z)$ *в* ∞.

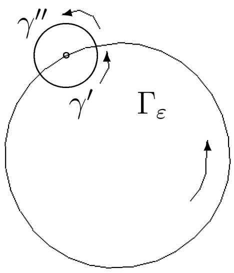
Теорема 2.8. *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна всюду на сфере* $\overline{\mathbb{C}}$, *за исключением конечного числа точек* $z_1, \dots, z_n \in \overline{\mathbb{C}}$. *Тогда* $\sum_{i=1}^{n} \mathsf{res}_{z_i} f = 0$.

Как вы уже заметили, все определения и теоремы для функций на $D \subset \mathbb{C}$ естественно распространяются на области, содержащие ∞. С этой точки зрения знак "-" в предыдущем определении объясняется что рассматриваемый нами контур обходит ∞ против часовой стрелки.

Определение 2.8. *Пусть функция* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ *определена в области* $U \setminus z_0$ *и* z_0 *— внутренняя точка компактной кривой* Γ. *Положим* $G_\varepsilon = \{z \in G | |z-z_0| \le \varepsilon\}$ *и* $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus G_\varepsilon$. *Тогда предел* $v.p. \int_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz$ *называется интегралом по* Γ *в смысле главного значения.*

Теорема 2.9. *Пусть функция* $\mu(z)$ *голоморфна в проколотой окрестности* z_0, $|\mu(z) - \mu(z_0)| \le const|z-z_0|$ *(условие Липшица) и* $z_0 \in \Gamma$, *где* Γ *— гладкая кривая. Тогда* $v.p. \displaystyle\int_\Gamma \frac{\mu(z)}{z-z_0}dz = \pi i \mu(z_0) + \int_\Gamma \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz.$

Proof. Можно считать, что кривая Γ замкнута и лежит в проколотой окрестности точки z_0, в которой функция $\mu(z)$ голоморфна. Положим $\gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} | |z-z_0| = \varepsilon\} = \gamma' \cup \gamma''$, где $\gamma' \cap \gamma'' \subset \Gamma$ (см.рисунок).



Тогда

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z-z_0}dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{\gamma'} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz$$

Поэтому $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z)}{z-z_0} = \int_\Gamma \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\mu(z_0)}{z-z_0}dz = \int_\Gamma \frac{\mu(z)-\mu(z_0)}{z-z_0}dz + \pi i \mu(z_0).$

$\square$

2.4. **Принцип аргумента.**

Определение 2.9. *В случае, если* f *имеет в* z_0 *нуль(или полюс) порядка* n, *будем говорить, что* f *имеет в* z_0 n *нулей (соответственно,* n *полюсов).*

Теорема 2.10. *Пусть функция* f *мероморфна в области* D *и* $\Gamma \subset D$ *— замкнутый контур, ограничивающий множество* G. *Пусть* N *— число нулей и* P *— число полюсов функции* f *в множестве* G, *причем граница* $\partial G = \Gamma$ *не содержит нулей и полюсов функции* f. *Тогда* $N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$.

Proof. Пусть z_0 — нуль порядка n или полюс порядка $-n$. Тогда

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z), \quad \text{где} \quad \phi(z_0) \neq 0,$$

$$f'(z) = (z - z_0)^{n-1} \left((z - z_0)\phi'(z) + n\phi(z) \right)$$

и

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{z - z_0} \left(n + (z - z_0) \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} \right).$$

Таким образом, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f'}{f} dz = n$, где $\gamma_{z_0} \subset G$ — контур, отделяющий точку z_0 от других нулей и полюсов. По теореме Коши интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ равен сумме всех интегралов вида $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{f'}{f} dz$, отвечающих нулям и полюсам z_0 функции f. Следовательно, $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$. □

Напомним, что число $\phi \in [0, 2\pi)$ называется *аргументом* числа $u = re^{i\phi}$ и обозначается $\arg u$. Пусть функция $f(u)$ определена на контуре Γ и $f|_\Gamma \neq 0$. Если переменная u обходит контур Γ один раз против часовой стрелки, то число $e^{i \arg f(u)}$ обходит контур $S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ целое число раз, обозначаемое $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f$.

Теорема 2.11. *[Принцип аргумента] В предположениях теоремы 2.10* $N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$.

Proof. Продеформируем Γ в малые контуры γ_i вокруг нулей и полюсов $f(z)$, и отрезки, соединяющие их с Γ (см. рисунок к теореме 1.6). Отрезки проходятся дважды в противоположных направлениях и вклада в величину $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$ не дают. Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z)$ равна сумме величин $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_i} \arg f(z)$ по всем контурам γ_i. Если γ — маленький контур, окружающий точку z_0, где $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$ и $\phi(z_0) \neq 0$, то $\frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \arg(z - z_0)^n = n$. □

Теорема 2.12 (Руше)**.** *Пусть функции f и g голоморфны в области D и замкнутый контур $\Gamma \subset D$, ограничивающий множество G, не содержит нулей f. Пусть $|f(z)| > |g(z)|$ на Γ. Тогда функции f и $f + g$ имеют в G одинаковое число нулей.*

Proof. Положим $F_\lambda = f + \lambda g$. Тогда $F_\lambda|_{\partial G} \neq 0$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. Следовательно, функция $\psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F_\lambda(z)$ существует, непрерывна, и, значит, постоянна. В частности,

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F_0(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(f(z) + g(z)).$$

Принцип аргумента завершает доказательство теоремы □

Следствие 2.1. *[Основная Теорема Алгебры] Многочлен степени n имеет на $\mathbb{C}$ ровно n корней.*

Proof. Произвольный многочлен имеет вид

$$P_n = a_n z^n + \cdots + a_0 = f(z) + g(z),$$

где $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$. Применим теперь теорему Руше к паре f, g и контуру Γ_R $\{z \in \mathbb{C} | |z| = R\}$ при достаточно большом R. □

2.5. **Топологические свойства мероморфных функций.**

Лемма 2.1. *Пусть* $f(z) = w_0 + (z - z_0)^n \phi(z)$*, где* $1 \leq n$*, функция* ϕ *голоморфна в окрестности точки* z_0 *и* $\phi(z_0) \neq 0$*. Тогда существуют области* $z_0 \in U$ *и* $w_0 \in W \subset f(U)$ *такие что для любой точки* $w \in W \setminus w_0$ *функция* $f|_U$ *принимает значение* w *в ровно* n *различных точках.*

Proof. Выберем r таким образом, чтобы на множестве $D = \{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| \leq r\}$ функция $\phi(z)$ не обращалась в нуль и f' не имела нулей на $D \setminus z_0$. Положим $U = D \setminus \partial D$, $\mu = \min_{z \in \partial D} |f(z) - w_0| > 0$ и $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \mu\}$.

Для произвольного $w \in W$ рассмотрим функцию $F(z) = f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$. На контуре ∂D ее части $(f(z) - w_0)$ и $(w_0 - w)$ удовлетворяют условию $|f(z) - w_0| \geq \mu \geq |w_0 - w|$. Согласно теореме Руше, отсюда следует, что функция $F(z) = f(z) - w$ имеет в области U столько же нулей, что и функция $(f(z) - w_0)$, то есть n нулей. При $w \neq w_0$ все они различны, поскольку f' не имеет нулей на $U \setminus z_0$. □

Теорема 2.13. *[Сохранение области] Если функция* f *голоморфна в области* D *и* $f \neq const$*, то* $f(D)$ *— тоже область.*

Proof. Согласно лемме 2.1, для всякой точки $z_0 \in D$ существует окрестность W точки $w_0 = f(z_0)$, такая что $W \subset f(D)$. □

Теорема 2.14 (Принцип максимума модуля). *Если непостоянная функция* f *голоморфна в области* D *и непрерывна на замыкании* $\overline{D} \subset \mathbb{C} \cup \infty$*, то* $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial \overline{D}} |f(z)|$.

Proof. Пусть функция $|f|$ достигает максимума в точке $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0)$. Тогда, согласно теореме 2.13, $W = \{z \in \mathbb{C} | |w - w_0| < r\} \subset f(D)$ для некоторого r. Множество W содержит точки w такие что $|w| > |w_0|$. Следовательно, существует точка $z \in D$ такая, что $w = f(z) \in W$ и $|f(z)| = |w| > |w_0|$. □

Теорема 2.15 (Лемма Шварца). *Пусть функция* $f(z)$ *голоморфна в области* $U = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$*,* $f(0) = 0$ *и* $|f(z)| \leq 1$*. Тогда* $|f(z)| \leq |z|$ *для всех точек* $z \in U$*, причем если* $|f(z_0)| = |z_0|$ *при* $z_0 \neq 0$*, то* $f(z) = \alpha z$*, где* $|\alpha| = 1$.

Proof. Функция $\phi(z) = \frac{f(z)}{z}$ голоморфна на каждом круге $U_r = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq r\}$, где $r < 1$. Согласно теореме 2.14, $\max_{z \in U_r} |\phi(z)| \leq \max_{z \in \partial U_r} |\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{r}$. Таким образом, $|\phi(z)| \leq 1$, то есть $|f(z)| \leq |z|$. Если $|f(z_0)| = |z_0|$ при $z_0 \in U$, то $z_0 \in U_r \setminus \partial U_r$ и $|\phi(z_0)| = 1 = \max_{z \in D_r} \phi(z)$. Согласно теореме 2.14, отсюда следует $\phi(z) = const$, причем $f(z) = \phi(z) z$, где $|\phi(z)| = 1$. □

3. Теорема Римана.

3.1. **Непрерывные функционалы на компактных семействах функций.**

Определение 3.1. *Семейство функций* $\mathfrak{F}$ *называется равномерно ограниченным внутри области* D*, если для любого компакта* $K \subset D$ *существует константа* $M = M(K)$*, такая что* $|f(z)| \leq M$ *для всех* $f \in \mathfrak{F}, z \in K$.

Задача 3.1. *Если семейство голоморфных функций $\mathfrak{F}$ равномерно ограничено внутри области D, то семейство функций $\{f'\}$ также равномерно ограничено внутри D. (Указание: Воспользоваться формулой Коши).*

Определение 3.2. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ называется равностепенно непрерывным внутри области D, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого компакта $K \subset D$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, K)$, такое что для всех $f \in \mathfrak{F}$ выполняется условие $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, если $z_1, z_2 \in K$ и $|z_1 - z_2| < \delta$.*

Задача 3.2. *Если семейство функций $\mathfrak{F}$, голоморфных внутри области D, равномерно ограничено внутри области D, то оно равностепенно непрерывно внутри D. (Указание: Воспользоваться задачей 3.1).*

Определение 3.3. *Последовательность функций на D называется фундаментальной, если она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset D$.*

Теорема 3.1. *[Монтель] Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство голоморфных функций, равномерно ограниченных внутри области D. Тогда из каждой последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.*

Proof. Пусть $\mathbb{Q} = \{\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \dots\} \subset D$ — подмножество всех точек с рациональными вещественными и мнимыми частями. Выберем из последовательности f_n подпоследовательность f_n^1, такую что $f_n^1(\widetilde{z}_1)$ сходится. Выберем из последовательности f_n^1 подпоследовательность f_n^2, такую что $f_n^2(\widetilde{z}_2)$ сходится и.т.д.... Положим $h_n = f_n^n$. Тогда $h_n(\widetilde{z}_p)$ сходится при любом p. Докажем фундаментальность последовательности h_n. Пусть $K \subset D$ — компакт. Тогда, согласно задаче 3.2, существует покрытие множества K квадратиками, такое что, если z' и z'' принадлежат одному квадратику, то $|f(z') - f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ввиду компактности K можно считать, что таких квадратиков конечное число. Выберем в каждом из них по одной точке из множества $\mathbb{Q}$. Получим точки $z_1, \dots, z_p$. Ввиду сходимости последовательностей $h_n(z_i)$, для всех i и, согласно критерию Коши, существует N, такое что $|h_m(z_i) - h_n(z_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n, m > N$ и всех i. Таким образом, если z_k лежит в том же квадратике, что и z, то $|h_m(z) - h_n(z)| \leq |h_m(z) - h_m(z_k)| + |h_m(z_k) - h_n(z_k)| + |h_n(z_k) - h_n(z)| < \varepsilon$. Следовательно, согласно критерию Коши, последовательность функции h_n равномерно сходится на K. $\square$

Определение 3.4. *Семейство функций $\mathfrak{F}$ на D называется компактным, если из любой последовательности функций $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность, сходящуюся к функции из $\mathfrak{F}$.*

Определение 3.5. *Отображение $J : \mathfrak{F} \to \mathbb{C}$, определенное на семействе функций $\mathfrak{F}$, называется функционалом. Функционал называется непрерывным, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$, сходящейся к $f \in \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\lim_{n\to\infty} J(f_n) = J(f)$.*

Задача 3.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство функций, голоморфных в области $D \ni a$. Доказать, что $J(f) \equiv f^{(p)}(a)$ — непрерывный функционал.*

Задача 3.4. *Доказать, что непрерывный функционал на компактном семействе ограничен.*

Теорема 3.2. *Пусть J - непрерывный функционал на компактном семействе $\mathfrak{F}$ функций на D. Тогда существует функция $f_0 \in \mathfrak{F}$, такая что $|J(f_0)| \geq |J(f)|$ для всех функций $f \in \mathfrak{F}$.*

Proof. Пусть $A = \sup_{f\in\mathfrak{F}} |J(f)|$. Тогда существует последовательность $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ такая, что $\lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = A$. Ввиду компактности семейства $\mathfrak{F}$ существует фундаментальная подпоследовательность функций $\{h_m\} \subset \{f_n\}$, сходящаяся к $f_0 \in \mathfrak{F}$. Ввиду непрерывности функционала $A = \lim_{n\to\infty} |J(f_n)| = \lim_{m\to\infty} |J(h_m)| = |J(f_0)|$ □

3.2. **Теорема Гурвица и однолистные функции.**

Теорема 3.3. *[Гурвиц] Пусть последовательность $\{f_n\}$ голоморфных функций в области D фундаментальна, $f = \lim_{n\to\infty} f_n \neq const$ и $f(z_0) = 0$. Тогда для любого $r > 0$ существует N такое, что для любого $n > N$ функция f_n имеет нуль в области $\{z \in D||z - z_0| < r\}$.*

Proof. Согласно теореме Вейерштрасса (1.15) $f(z) = (z - z_0)^p(a + \phi(z))$, где $a \neq 0$, функция $\phi(z)$ голоморфна и $\phi(z_0) = 0$. Поэтому существует $\rho > 0$ такое, что $|f(z)| > 0$ на множестве $Q = \{0 < |z - z_0| \leq \rho\}$. Положим $\mu = \min\limits_{\partial Q} |f(z)| > 0$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на границе ∂Q, то существует N такое, что для любых $n > N$ и $z \in \partial Q$ выполнено неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \mu$. Следовательно, согласно теореме Руше(2.12) функция $f_n = f + (f_n - f)$ имеет в области $Q \setminus \partial Q$ нуль. □

Определение 3.6. *Функция f называется однолистной, если она реализует взаимно-однозначное соответствие, то есть $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.*

Теорема 3.4. *[Критерий однолистности] Голоморфная функция f однолистна в некоторой окрестности точки z_0, если и только если $f'(z_0) \neq 0$.*

Proof. Согласно лемме 2.1, обратимость f в окрестности точки z_0 эквивалентна равенству $f(z) = w_0 + (z - z_0)\phi(z)$, где $\phi(z_0) \neq 0$, что эквивалентно условию $f'(z_0) \neq 0$. □

Задача 3.5. *Доказать, что функция g, обратная к однолистной функции f, тоже однолистна и $g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$.*

Теорема 3.5. *Пусть последовательность однолистных на области D функций $\{f_n\}$ фундаментальна и сходится к непостоянной функции f. Тогда функция f однолистна.*

Proof. Согласно теореме Вейерштрасса f — голоморфная функция. Предположим, что $z_1 \neq z_2$ и $f(z_1) = f(z_2)$. Рассмотрим область $Q = \{z \in D||z - z_1| < |z_2 - z_1|\}$. Последовательность функций $h_n(z) = f_n(z) - f_n(z_2)$ сходится к функции $h(z) = f(z) - f(z_2)$, где $h(z_1) = 0$. Согласно теореме 3.3, существуют N и $z_0 \in Q$ такие что $h_N(z_0) = 0$. Следовательно, $f_N(z_0) = f_N(z_2)$, что противоречит однолистности функции f_N. □

Теорема 3.6. *Пусть S — семейство всех голоморфных однолистных функций на области D, таких что $|f| \leq 1$. Предположим, что оно не пусто. Тогда существуют функция $f_0 \in S$ и точка $a \in D$ такие что $0 < |f_0(a)|$ и $|f'(a)| \leq |f_0'(a)|$ для всех $f \in S$.*

Proof. По условию существуют функция $f_1 \in S$ и точка $a \in D$ такие что $|f_1'(a)| > 0$. Положим $S_1 = \{f \in S||f'(a)| \geq |f_1'(a)|\}$. Согласно теореме Монтеля(3.1), из каждой последовательности $\{f_n\} \subset S_1$ можно выбрать фундаментальную подпоследовательность. По теореме Вейерштрасса её предел g — голоморфная функция, такая что $|g'(a)| \geq |f_1'(a)| > 0$, то есть $g \neq const$. Согласно теореме 3.5, отсюда следует, что g — однолистная функция, то есть $g \in S_1$. Таким образом, S_1 – компактное семейство функций. Согласно задаче 3.3, $y(a) = |f'(a)|$ — непрерывный функционал на S_1. Согласно теореме 3.2, он достигает максимума на некоторой функции $f_0 \in S_1$. Следовательно, $|f_0'(a)| \geq |f'(a)|$ для всех $f \in S$. □

3.3. **Аналитическое продолжение.**

Определение 3.7. *Каноническим элементом называется пара (U_a, f_a), где U_a — круг с центром в a, и $f_a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z-a)^i$ — ряд сходящийся в U. Канонические элементы (U_a, f_a) и $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ считаются эквивалентными, если $f_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a} = \tilde{f}_a|_{U_a \cap \tilde{U}_a}$.*

Определение 3.8. *Пусть $\gamma \subset \mathbb{C}$ — путь без самопересечений, соединяющий точки $a \neq b$. Говорят, что канонический элемент (U_b, f_b) является аналитическим продолжением канонического элемента (U_a, f_a) вдоль пути γ, если существуют эквивалентные (U_a, f_a) и (U_b, f_b) канонические элементы $(\tilde{U}_a, \tilde{f}_a)$ и $(\tilde{U}_b, \tilde{f}_b)$, область $D \supset \gamma \cup \tilde{U}_a \cup \tilde{U}_b$ и голоморфная функция $f : D \to \mathbb{C}$ такие, что $f|_{\tilde{U}_a} = f_a$ и $f|_{\tilde{U}_b} = \tilde{f}_b$.*

Определение 3.9. *Далее мы будем называть путем лишь пути, которые можно разбить на конечное число участков без самопересечений. Аналитическое продолжение вдоль такого пути определяется как композиция аналитических продолжений по его частям без самопересечений.*

Задача 3.6. *Докажите, что аналитическое продолжение вдоль пути не зависит от разбиения пути на участки без самопересечений.*

Замечание 3.1. *Аналитическое продолжение можно построить, покрыв путь дисками $\gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_{a_i}$, где $U_{a_1} = U_a$ и $U_{a_k} = U_b$ и последовательно "переразложить" функцию f от диска к диску, строя канонические элементы (U_{a_i}, f_{a_i}) такие, что $f_{a_i}|_{U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}}} = f_{a_{i+1}}|_{U_{a_i} \cap U_{a_{i+1}}}$.*

Теорема 3.7. *Пусть γ_0 и γ_1 — гомотопные пути с одинаковыми концами a и b, и $\gamma_t(t \in [0,1])$ — гомотопия между ними. Пусть (U_a, f_a) — канонический элемент, имеющий аналитическое продолжение вдоль каждого пути γ_t. Тогда аналитические продолжения канонического элемента (U_a, f_a) вдоль путей γ_0 и γ_1 эквивалентны.*

Proof. Пусть $(U_{a_i^t}, f_{a_i^t})$ — канонические элементы, отвечающие пути γ_t и точкам $a_1, ..., a_{k_t}$ о которых идет речь в последнем определении. Рассмотрим множество T таких $t \in [0,1]$, что аналитические продолжения вдоль путей γ_0 и γ_t эквивалентны. Для любой области $D \supset \gamma_t$ существует $\delta > 0$ такое, что $D \supset \gamma_{t'}$ при $|t - t'| < \delta$. Таким образом, множество T — открыто. По очевидным причинам T замкнуто. Значит, $T = [0,1]$. □

Задача 3.7. *Показать, что при нарушении условия теоремы 3.7 о существовании аналитического продолжения вдоль каждого пути γ_t аналитические продолжения вдоль путей γ_0 и γ_1 могут не быть эквивалентными.*

3.4. **Теорема Римана.**

Задача 3.8. *Если* $|a| < 1, |b| < 1$, *то* $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$.

Определение 3.10. *Области* $D_1, D_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ *называются биголоморфно эквивалентными, если между ними существует взаимно-однозначное голоморфное отображение* $\varphi : D_1 \to D_2$. *Обратное отображение* $\varphi^{-1} : D_2 \to D_1$ *в этом случае тоже голоморфно (задача 3.5). Поэтому такое отображение* φ *называется биголоморфным.*

Пример 3.1.

- *Отображение* $h(z) = \frac{1}{z} + c$ *биголоморфно переводит* $\mathbb{C}$ *в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus c$. *Значит все сферы Римана без одной точки биголоморфно эквивалентны* $\mathbb{C}$.
- *Биголоморфное отображение является гомеоморфизмом. Поэтому сфера Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ *не биголоморфно эквивалентна комплексной плоскости* $\mathbb{C}$ *и единичному диску* $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.
- *Комплексная плоскость* $\mathbb{C}$ *и единичный диск* Λ *гомеоморфны, но тоже не биголоморфно эквивалентны. Это следует из следующего замечания.*

  Соответствие $f(z) \mapsto f^*(z) = f(\varphi(z))$ *устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами голоморфных функций на* D_1 *и* D_2. *Это соответствие переводит ограниченные функции в ограниченные и постоянные функции в постоянные. Функция* $f(z) = z$ *голоморфна, ограничена и непостоянна на* Λ. *В то время как, согласно теореме Лиувилля, все ограниченные голоморфные функции на* $\mathbb{C}$ *постоянны.*

Теорема 3.8 (Риман). *Всякая связная односвязная область на сфере Римана биголоморфно эквивалентна или самой сфере Римана* $\overline{\mathbb{C}}$, *или комплексной плоскости* $\mathbb{C}$, *или единичному диску* Λ.

Proof. Пусть связная и односвязная область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ не биголоморфно эквивалентна $\overline{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$. Тогда дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ содержит не совпадающие точки $\alpha \neq \beta$. Функция $f = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$ принимает в $a \in D$ два значения и порождает два канонических элемента (U_a^1, f_a^1), (U_a^2, f_a^2), где $f_a^1 = -f_a^2$ на $U_a^1 \cap U_a^2$. Соединим произвольную точку $b \in D$ с точкой a путем $\gamma \subset D$. Пусть (U_b^i, f_b^i) — аналитическое продолжение (U_a^i, f_a^i) вдоль γ. Согласно теореме 3.7, канонический элемент (U_b^i, f_b^i) не зависит от γ. Таким образом, существуют аналитические функции $f^i : D \to \mathbb{C}$, такие что $f_b^i = f^i|_{U_b}$ для всех $b \in D$, причем $f^2 = -f^1$. Положим $D_i = f^i(D)$. Если $f^i(z_1) = \pm f^i(z_2)$, то $\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}$, откуда $z_1 = z_2$. Таким образом, функции f^i однолистны и $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Согласно теореме сохранения области (2.13), область D_2 содержит круг $W = \{w \in \mathbb{C} | |w - w_0| < \rho\}$, причем $|f^1(z) - w_0| \geq \rho$, ввиду $W \cap D_1 = \emptyset$. Положим $\tilde{f}(z) = \frac{\rho}{f^1(z)-w_0}$. Функция $\tilde{f} \neq const$ голоморфна, однолистна и $|\tilde{f}(z)| \leq 1$.

Рассмотрим множество S всех однолистных функций $g : D \to \Lambda$. Оно содержит непостоянную функцию $\tilde{f}$. Согласно теореме 3.6, существуют точка $a \in D$ и функция $f_0 \in S$ такие, что $|g'(a)| \leq |f_0'(a)| > 0$ для всех функций $g \in S$.

Докажем, что $f_0(D) = \Lambda$. Положим $h(z) = \dfrac{f_0(z) - f_0(a)}{1 - \overline{f_0(a)} f_0(z)}$. Тогда функция $h(z)$ — однолистна и, согласно задаче 3.8, $|h(z)| \leq 1$. Следовательно, $h \in S$, откуда $|f_0'(a)| \geq |h'(a)| = \frac{1}{1-|f_0(a)|^2}|f_0'(a)|$ и $f_0(a) = 0$.

Докажем, что любое $b \in \Lambda \setminus 0$ принадлежит $f_0(D)$. Предположим что $b \notin f_0(D)$. Рассмотрим $\psi(z) = \sqrt{\dfrac{f_0(z) - b}{1 - \bar{b} f_0(z)}}$. Аналитически продолжая канонический элемент (U_a, ψ_a^1) функции ψ, построим голоморфную функцию ψ^1 на D. Рассмотрим функцию $\tilde{h}(z) = \dfrac{\psi^1(z) - \psi^1(a)}{1 - \overline{\psi^1(a)}\psi^1(z)}$. Она однолистна и, согласно задаче 3.8, $|\tilde{h}(z)| \le 1$, то есть $\tilde{h} \in S$. Но тогда $|f_0'(a)| \ge |\tilde{h}'(a)| = \frac{1+|b|}{2\sqrt{|b|}}|f_0'(a)| > |f_0'(a)|$. Полученное противоречие доказывает, что $b \in f_0(D)$. □

3.5. **Автоморфизмы односвязных областей.** Голоморфный изоморфизм области $D \in \overline{\mathbb{C}}$ на себя называется *автоморфизмом* комплексной области D. Суперпозиция таких автоморфизмов задает на их множестве структуру группы $\mathsf{Aut}(D)$.

Задача 3.9. *Доказать, что отображение* $f(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ *принадлежит* $\mathsf{Aut}(\Lambda)$, *если* $|a| < 1$.

Теорема 3.9. $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) = \{z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \ne 0\}$,

$$\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b | a, b \in \mathbb{C}, a \ne 0\}$$

$$\mathsf{Aut}(\Lambda) = \{z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} ||a| < 1, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Proof. Из определений следует, что $\mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{f \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) | f(\infty) = \infty\}$. Пусть $g \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$. Тогда $g(a) = \infty$ для $a \in \mathbb{C}$. Согласно теоремам об изолированных особых точках (2.5 и 2.7), $g(z) = \frac{A}{z-a} + \phi(z)$, где функция ϕ голоморфна на $\mathbb{C}$. Кроме того, $\lim_{z\to\infty}\phi(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) = g(\infty) \in \mathbb{C}$ и по теореме Лиувилля(2.4) $\phi(z) = const$. Таким образом, $\mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto \frac{A}{z-a} + B | A, B, a \in \mathbb{C}, A \ne 0\}$.

Если $f \in \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$, то $f(z^{-1}) \in \mathsf{Aut}(\overline{\mathbb{C}}) \setminus \mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ и, как уже доказано, $f(z^{-1}) = \frac{A}{z} + B$. Отсюда $f(z) = Az + B$, где $A \ne 0$.

Пусть $f \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$ и $f(a) = 0$. Положим $\phi(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ и $g(z) = f(\phi^{-1}(z))$. Тогда согласно задаче 3.9, $g \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$, причем $g(0) = 0$. Применяя лемму Шварца (теорема 2.15) к функциям g и g^{-1}, находим, что $|g(z)| = |z|$. Отсюда по лемме Шварца $g(z) = e^{i\alpha}z$. Таким образом, для $w = \phi(z)$ мы имеем $f(w) = g(\phi(w)) = e^{i\alpha}\frac{w-a}{1-\bar{a}w}$ □

Задача 3.10. *Доказать, что* $\mathsf{Aut}(\{z \in \mathbb{C} | \mathtt{Im}(z) > 0\}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad-bc > 0\}$

3.6. **Соответствие границ.** Обсудим вопрос о продолжении биголоморфного отображения на границу. Приведем без доказательства следующую важную теорему, называемую принципом соответствия границ.

Теорема 3.10. *(Каратеодори) Пусть области* $D_1, D_2 \subset \overline{\mathbb{C}}$ *ограничены жордановыми кривыми. Тогда биголоморфное отображение* $f : D_1 \to D_2$ *продолжается до гомеоморфизма замыканий* $\bar{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$

Задача 3.11. *Доказать, что если граница области содержит аналитическую дугу γ, то биголоморфное отображение этой области на единичный круг можно аналитически продолжить через γ.*

4. Введение в римановы поверхности.

4.1. **Аналитические функции.** Язык аналитических функций — это удобный подход к описанию "хороших многозначных функций" типа логарифмов или неявных функций $F(z,w) = 0$. Именно такие функции часто возникают в естественных науках.

Определение 4.1. *Аналитической функцией F называется множество всех аналитических продолжений $\{(U_a^l, f_a^l)\}$ канонического элемента (U_a, f_a) по всем путям l с началом в a, которые можно разбить на пути без самопересечений. Две аналитические функции считаются равными, если они имеют хотя бы одну пару эквивалентных канонических элементов.*

Определение 4.2. *Пусть $F = \{(U_a^l, f_a^l) | l \in L\}$ — аналитическая функция. Сопоставим каждому $z \in \overline{\mathbb{C}}$ множество $L(z) = \{l \in L | z \in U_a^l\}$ и набор $\{z^l | l \in L(z)\}$ копий точки z. Рассмотрим теоретико-множественное объединение $\bigcup\limits_{z\in\overline{\mathbb{C}}, l\in L(z)} z^l$ и отождествим точки z^l и $z^{\tilde{l}}$, если функции f_a^l и $f_a^{\tilde{l}}$ совпадают в некоторой окрестности точки z. Получившееся множество P_F называется римановой поверхностью P_F аналитической функции F. Соответствие $(z^l, U_a^l) \mapsto f_a^l(z^l)$ задает отображение $f_F : P_F \to \mathbb{C}$.*

Задача 4.1. *Построить римановы поверхности функций $w = \ln(z)$ и $w = \sqrt{z^3 + az^2 + bz + c}$.*

Таким образом, аналитическая функция F описывается функцией f_F в обычном для нас смысле на своей римановой поверхности P_F.

Задача 4.2. *Дайте определение мероморфной аналитической функции F, ее римановой поверхности и отображения $f_F : P_F \to \mathbb{C}$*

4.2. **Римановы поверхности.** Риманова поверхность аналитической функции получается "склейкой" областей комплексной плоскости. Область комплексной плоскости обладает замечательными свойствами, сохраняющимися при биголоморфных отображениях. Поэтому замечательными свойствами должна обладать и их произвольная склейка с помощью биголоморфных отображений. Структура, получающаяся в результате такой склейки, называется римановой поверхностью. Приведем формальное определение.

Определение 4.3.
- *Голоморфным атласом на топологической поверхности S называется семейство пар $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ (называемых картами), состоящих из подмножества $U_\alpha \subset S$, где $\bigcup U_\alpha = S$ и гомеоморфизмов $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ на открытые и односвязные подмножества в $\mathbb{C}$, таких, что $\varphi_\beta \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ — голоморфные функции.*
- *Голоморфные атласы на поверхности S называются эквивалентными, если их объединение тоже голоморфный атлас.*

- *Класс эквивалентности голоморфных атласов на S называется комплексной структурой. Поверхность с комплексной структурой называется римановой поверхностью.*

Задача 4.3. *Докажите, что произвольная область $U \subset \overline{\mathbb{C}}$ является римановой поверхностью.*

Задача 4.4. *Докажите, что риманова поверхность аналитической функции P_F является римановой поверхностью.*

Определение 4.4. *Отображение $f : P \to \bar{\mathbb{C}}$ римановой поверхности P с голоморфным атласом $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на сферу Римана $\bar{\mathbb{C}}$ называется мероморфной функцией, если мероморфны все функции $f\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \bar{\mathbb{C}}$.*

Задача 4.5. *Докажите, что отображение $f_F : P_F \to \mathbb{C}$, порожденное мероморфной аналитической функцией F, является мероморфной функцией на своей римановой поверхности. Дайте ее описание в терминах локальных карт.*

Для завершения описания категории римановых поверхностей нам осталось описать морфизмы между ними. Это голоморфные отображения в следующем смысле

Определение 4.5. *Рассмотрим римановы поверхности P и Q, заданные голоморфными атласами $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ соответственно. Отображение $f : P \to Q$ называется голоморфным, если $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta)$ голоморфны при $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$.*

Таким образом, мероморфные функции на римановой поверхности — это ее голоморфные морфизмы в сферу Римана.

Задача 4.6. *Доказать, что определение голоморфного отображения не зависит от выбора голоморфного атласов в классе эквивалентности, определяющего риманову поверхность.*

Обратимые голоморфные отображения римановых поверхностей называются (биголоморфными) *изоморфизмами.*

Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановых поверхностей, $p \in P$, $q = f(p)$. Рассмотрим локальные карты $\{(U, z)\}$ и $\{(V, w)\}$ такие, что $z(p) = w(q) = 0$. Тогда в малой окрестности нуля голоморфная функция $h = wf(z^{-1}) : z(U) \to w(V)$ представляется в виде $h(z) = z^n \omega(z)$, где $\omega(0) \neq 0$. Число $\deg_p f = n$ называется *степенью ветвления отображения f в точке p.*

Задача 4.7. *Докажите, что степень ветвления отображения f в точке p не зависит от выбора локальных карт $\{(U, z)\}$ и $\{(V, w)\}$. Докажите, что эти локальные карты можно выбрать таким образом, чтобы $h(z) = z^{\deg_p f}$.*

Точка $p \in P$ называется *критической точкой* или *точкой ветвления* голоморфного отображения f, если $\deg_p f > 1$. Точка $q \in Q$ называется *критическим значением* голоморфного отображения f, если прообраз $f^{-1}(q)$ имеет хотя бы одну критическую точку.

4.3. **Формула Римана-Гурвица.** Компактные римановы поверхности представляют особый интерес. Можно доказать, например, что категория компактных римановых поверхностей изоморфна категории комплексных алгебраических кривых. Топологический тип римановой поверхности полностью определяется ее родом.

Задача 4.8. *Докажите, что образ голоморфного отображения $f : P \to Q$ компактной римановой поверхности P является тоже компактной римановой поверхностью, число критических точек отображения f конечно и ограничение f на достаточно маленькую окрестность некритической точки является гомеоморфизмом.*

Лемма 4.1. *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей и $V \subset Q$ — область, не содержащая критических значений отображения f. Тогда прообраз $f^{-1}(V)$ распадается на конечное число компонент связности, на любой из которых отображение f порождает гомеоморфизм.*

Proof. Рассмотрим компоненту связности $U \subset P$ прообраза $f^{-1}(V)$. Рассмотрим точки $x \in f(U)$, $y \in V$ и соединяющий их отрезок $l \subset V$ без самопересечений. Множество $f^{-1}(l) \cap U \subset P$ замкнуто ввиду компактности поверхности P. Следовательно, замкнутым будет и множество $s = f(f^{-1}(l))$. С другой стороны, оно открыто, как подмножество отрезка l, поскольку множество $f^{-1}(l)$ не содержит критических точек открытого отображения f. Таким образом, $s = l$, $y \in f(U)$ и $f(U) = V$.

Отсюда следует, в частности, что число компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$ совпадает с числом прообразов точки $q \in V$, которое конечно ввиду ввиду компактности поверхности P.

Пусть $U \subset P$ компонента связности прообраза $f^{-1}(V)$ и $p_1 \neq p_2 \in U$. Рассмотрим линию $l \subset U$, соединяющую p_1 и p_2. Ее образ $f(l) \subset V$ образует замкнутый контур, гомотопный точке в виду односвязности V. Поднятие этой гомотопии на U стягивает в точку линию l, что невозможно в виду $p_1 \neq p_2$. Следовательно, $f(p_1) \neq f(p_2)$. □

Лемма-определение 4.1. *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей. Тогда число прообразов $|f^{-1}(q)|$ одинаково для всех не критических значений $q \in Q$ и называется степенью $\deg f$ отображения f.*

Proof. Рассмотрим не критические значения $q_1, q_2 \in Q$ и содержащую их связную односвязную область V без критических значений. Тогда, согласно предыдущей лемме, в каждой компоненте связности прообраза $f^{-1}(V)$ лежит ровно один прообраз из $f^{-1}(q_i)$. Следовательно, число прообразов $|f^{-1}(q_i)|$ совпадает с числом компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$. □

Задача 4.9. *Рассмотрим голоморфное отображение компактных римановых поверхностей $f : P \to Q$. Доказать, что $\deg f = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$ для любой точки $q \in Q$.*

Теорема 4.1. *(Формула Римана-Гурвица) Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение степени $n = \deg f$ компактной римановой поверхности рода g_P на компактную риманову поверхность рода g_Q с критическими точками $p_1, ..., p_k \in P$ степени $n_i = \deg_{p_i} f$. Тогда $g_P = n(g_Q - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$.*

Proof. Триангулируем поверхность Q так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения $q_1, \ldots, q_s$. Пусть эта триангуляция T_Q состоит из F_Q граней, E_Q ребер и V_Q вершин. Прообраз этой триангуляции образует триангуляцию поверхности P из F_P граней, E_P ребер и V_P вершин. На гранях и ребрах отображение f — гомеоморфизм и значит $F_P = nF_Q$, $E_P = nE_Q$.

Пусть в вершину $q \in Q$ триангуляции перешли точки $h_1, \ldots, h_r \in P$ и $n_1^q, \ldots, n_r^q$ порядки функции f в этих точках. Тогда $n = \sum\limits_{i=1}^{r} n_i^q$ и $r = n - \sum\limits_{i=1}^{r}(n_i^q - 1)$. Значит общее число V_P точек, перешедших во все вершины $\tilde{V}_Q$ триангуляции равно $\sum\limits_{q\in\tilde{V}_Q} (n - \sum\limits_{i=1}^{r}(n_i^q - 1)) = nV_Q - \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1)$.

Сопоставим теперь эйлеровы характеристики поверхностей P и Q. Тогда $2 - 2g_Q = \chi(Q) = F_Q - E_Q + V_Q$ и $2-2g_P = \chi(P) = F_P - E_P + V_P = nF_Q - nE_Q + nV_Q - \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n(2-2g_Q) - \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1)$, откуда $g_P = n(g_Q - 1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$. □

4.4. **Униформизация.** Перейдем теперь к классификации римановых поверхностей. Начнем с односвязных. Тут имеет место замечательная теорема униформизации, анонсированная Риманом и доказанная только через 50 лет (П.Кебе 1908 год)

Теорема 4.2. *Всякая односвязная риманова поверхность изоморфна $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$.*

Для подмножеств сферы Римана $\mathbb{C}$ это утверждение следует из теоремы Римана. Но общая теорема много сложнее.

Рассмотрим теперь произвольную риманову поверхность P. Рассмотрим ее топологическое универсальное односвязное накрытие $\psi : \tilde{P} \to P$. Это накрытие задает представление поверхности P в виде фактор-поверхности $\tilde{P}/\Gamma$, где Γ — дискретная группа, действующая на $\tilde{P}$ без неподвижных точек. Голоморфный атлас на P порождает голоморфный атлас на $\tilde{P}$ такой, что ψ — голоморфное отображение. Эквивалентные атласы на P порождают при этом эквивалентные атласы на $\tilde{P}$. Отображение ψ определяет, таким образом, на $\tilde{P}$ структуру римановой поверхности, относительно которой ψ — голоморфное отображение, и $\Gamma \in \mathsf{Aut}(\tilde{P})$ (доказать).

Задача 4.10. *Пусть Λ_F — односвязная накрывающая римановой поверхности P_F аналитической функции F, $\psi : \Lambda_F \to P$ естественная проекция и $f_\Lambda = f_F \psi$. Докажите, что если $\mathsf{Aut}(P_F) = 1$, то риманова поверхность P_F биголоморфно эквивалентна римановой поверхности Λ_F/Γ, где $\Gamma = \{g \in \mathsf{Aut}(\Lambda) | f_\Lambda g = f_\Lambda\}$.*

Вопрос об изоморфизмах фактор-поверхностей решается следующим образом

Задача 4.11. *Фактор-поверхности не изоморфных односвязных римановых поверхностей не изоморфны. Действующие без неподвижных точек группы $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathsf{Aut}(\tilde{P})$ порождают изоморфные римановы поверхности $\tilde{P}/\Gamma_1$, $\tilde{P}/\Gamma_2$ если и только если Γ_1 и Γ_2 сопряжены в группе $\mathsf{Aut}(\tilde{P})$, то есть $\Gamma_1 = A\Gamma_2 A^{-1}$ для $A \in \mathsf{Aut}(\tilde{P})$.*

Теорема униформизации и задача 4.11 сводит описание римановых поверхностей к описанию классов сопряженности, действующих без неподвижных точек дискретных подгрупп на односвязных униформизирующих поверхностях: сфере Римана, комплексной плоскости и единичном диске.

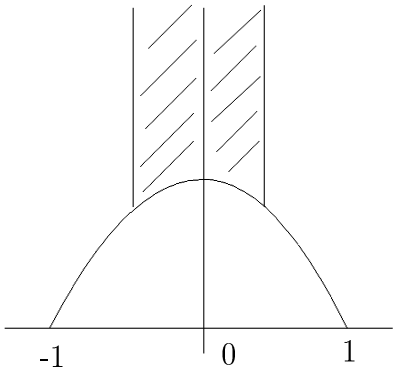
Задача 4.12. *Докажите, что все автоморфизмы сферы Римана имеют неподвижные точки. Докажите, что действующие без неподвижных точек дискретные группы автоморфизмов комплексной плоскости порождены одним или двумя параллельными переносами. Докажите, что фактор-поверхность $\mathbb{C}/\Gamma$ по группе Γ, порожденным произвольным параллельным переносом, изоморфна $\mathbb{C} \setminus 0$.*

Определение 4.6. *Дискретные подгруппы группы Γ группы автоморфизмов единичного диска Λ и верхней полуплоскости H называются фуксовыми.*

Задача 4.13. *Доказать, что каждая фуксова группа или порождена одним элементом, или не коммутативна.*

Пример 4.1. *Следующая группа является фуксовой и называется классической модулярной группой* $\mathtt{Mod} = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\} \cong \mathit{PSL}(2, \mathbb{Z})$.

Задача 4.14. *Найти параболические элементы модулярной группы. Найти простые образующие и фундаментальную область модулярной группы. Указание, рассмотреть следующую область:*



Подведем промежуточный итог.

Теорема 4.3. *Всякая риманова поверхность P изоморфна $\overline{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus 0$, тору $\mathbb{C}/\Gamma'$, где Γ' — группа, порожденная двумя не коллинеарными параллельными переносами, или Λ/Γ, где $\Gamma \subset \mathsf{Aut}(\Lambda) \cong \pi_1(P, p)$ — фуксова группа, действующая без неподвижных точек.*

4.5. **Модули римановых поверхностей рода 1.** Множество классов изоморфности римановых поверхностей фиксированного топологического типа называется *пространством модулей*.

Мы уже знаем, что единственной компактной римановой поверхностью рода 0 является сфера Римана.

Теорема 4.4. *Пространство модулей M_1 компактных римановых поверхностей рода 1 естественно отождествляется с пространством $H/\mathtt{Mod}$.*

Proof. Рассмотрим риманову поверхность $P = \tilde{P}/\Gamma$ рода 1. Тогда $\Gamma \cong \pi_1(P) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Таким образом, согласно задачам 4.13 и 4.12, $\tilde{P} = \mathbb{C}$ и группа $\Gamma \subset \mathsf{Aut}\,\mathbb{C}$ порождена параллельными переносами T_{f_1}, T_{f_2} на векторы $f_1, f_2 \in \mathbb{C}$, где $\frac{f_1}{f_2} \notin \mathbb{R} \cup \infty$. Согласно задаче 4.11, можно считать, что $f_2 = 1$ и $\mathbf{Im} f_1 > 0$, то есть $f_1 \in H$. Более того, согласно задаче 4.11, пары векторов $(1, \tau)$ и $(1, \tau')$, где $\tau, \tau' \in H$ порождают изоморфные римановы поверхности если и только если они порождают сопряженные в $\mathsf{Aut}(\mathbb{C})$ группы параллельных переносов. Это означает, что для некоторого $A \in \mathbb{C}$ образующие $(A, A\tau')$ группы параллельных переносов выражаются через образующие $(1, \tau)$ группы параллельных переносов по формулам $A = c\tau + d$ и $A\tau' = a\tau + b$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathtt{SL}(2, \mathbb{Z})$. Таким образом, $\tau' = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d} = \gamma\tau$, где $\gamma \in \mathtt{Mod}_{1,0,0}$. □

Задача 4.15. *Пространство модулей римановых поверхностей рода 1 имеет естественную комплексную структуру и изоморфно комплексной плоскости.*

5. Модули гиперболических римановых поверхностей.

5.1. **Автоморфизмы верхней полуплоскости.** Вместо единичного диска Λ часто удобно рассматривать изоморфную ему верхнюю полуплоскость $H = \{z \in \mathbb{C} | \mathbf{Im} z > 0\}$. Это связано с простым видом ее группы автоморфизмов $\mathsf{Aut}(H) = \{Az = \frac{az+b}{cz+d} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc > 0\} \cong \mathtt{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Задача 5.1. *Доказать, что группа* $\mathsf{Aut}(H)$ *совпадает с группой изометрий метрики* $ds = \dfrac{|dz|}{\boldsymbol{Im}(z)}$. *Эта метрика задает на H модель Пуанкаре геометрии Лобачевского. Найдите прямые (т.е. геодезические) геометрии Лобачевского в этой модели.*

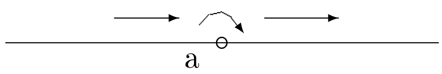
Эта метрика постоянной отрицательной кривизны называется *гиперболической.* Факторизация по дискретной группе, действующей без неподвижных точек, переносит метрику на фактор поверхность. Поэтому все римановы поверхности, униформизируемые H, называются *гиперболическими.*

Неподвижные точки автоморфизма $Az = \frac{az+b}{cz+d}$ A являются корнями z_1, z_2 уравнения $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Автоморфизм A называется:

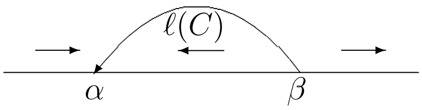
- *Эллиптическим*, если $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$. В этом случае $z_2 = \overline{z}_1$ и автоморфизм A имеет одну неподвижную точку в H.
  Пример: $A(z) = \frac{z+1}{-z+1}$.
- *Параболическим*, если $z_1 = z_2$. В этом случае $z_1 = z_2 \in \mathbb{R}$ и у автоморфизма A нет неподвижных точек на H, и лишь одна неподвижная точка на $\mathbb{R} \cup \infty$.
  Пример: $A(z) = z + b$.
- *Гиперболическим*, если $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{R}$. В этом случае у автоморфизма A также нет неподвижных точек на H, зато ровно две неподвижные точки на $\mathbb{R} \cup \infty$.
  Пример: $A(z) = \lambda z$.

Задача 5.2. *Доказать, что всякий параболический автоморфизм с неподвижной точкой* $a \in \mathbb{R}$ *сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(H)$ *с автоморфизмом* $z \mapsto z + 1$ *и имеет вид*

$C(z) = \dfrac{(1-a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1+a\gamma)}$. *Если $\gamma > 0$, то $C(r) > r$. В окрестности точки а такой автоморфизм действует как показано на рисунке.*



Задача 5.3. *Доказать, что всякий гиперболический автоморфизм C сопряжен в группе* $\mathsf{Aut}(H)$ *с автоморфизмом $z \mapsto \lambda z, \lambda > 0$, и имеет вид $Cz = \dfrac{(\lambda a - \beta)z + (1-\lambda)\alpha\beta}{(\lambda - 1)z + (\alpha - \lambda\beta)}$, где число $\lambda > 1$ называется параметром сдвига C, α — неподвижная притягивающая и β — неподвижная отталкивающая точки автоморфизма C. Соединяющая их полуокружность $\ell(C)$ инвариантна относительно C (инвариантная прямая геометрии Лобачевского).*



Неподвижную точку $a(C)$ параболического автоморфизма C мы будем обозначать также $\alpha(C) = \beta(C) = a(C)$.

5.2. **Тип римановых поверхностей.** Риманова поверхность, гомеоморфная цилиндру, изоморфна $H/ < C >$, где группа $< C >$, порожденная одним параболическим или гиперболическим автоморфизмом C, действующим без неподвижных точек. Метрика постоянной отрицательной кривизны на H порождает метрику постоянной отрицательной кривизны на римановой поверхности $H/ < C >$. В обоих случаях поверхность $H/ < C >$ гомеоморфна цилиндру, но возникающие римановы поверхности не изоморфны, поскольку параболический автоморфизм не сопряжен гиперболическому в группе $\mathsf{Aut}(H)$.

Задача 5.4. *Докажите, что порожденная параболическим автоморфизмом C риманова поверхность $H/ < C >$ изоморфна $\Lambda \setminus 0$ и не имеет замкнутых геодезических.*

Задача 5.5. *Докажите, что порожденная гиперболическим автоморфизмом C риманова поверхность $H/ < C >$ имеет единственную геодезическую, совпадающую с образом инвариантной прямой автоморфизма C. Эта геодезическая является простым, не гомотопным 0 контуром минимальной длины. Поверхности изоморфны, если и только если соответствующие длины минимальных геодезических равны.*

Таким образом, на цилиндре могут существовать ровно три разных класса комплексных структур. Одну из них, *сферу Римана с двумя проколами* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty \cup 0\} = \mathbb{C} \setminus 0$ (см. раздел 4.4) мы будем называть также поверхностью типа $(0,1,1)$. Вторую, порожденную параболическим элементом и изоморфную *проколотому диску* $\Lambda \setminus 0$ мы будем называть также римановой поверхностью типа $(0,1,1)$. Третью, порожденную параболическим элементом, мы будем называть *диском с дырой* или римановой поверхностью типа $(0,2,0)$.

Далее мы будем рассматривать гиперболические римановы поверхности с конечно-порожденной фундаментальной группой. Они гомеоморфны компактной поверхности рода g, из которых удалены n связных односвязных попарно не пресекающихся замкнутых множества. Окрестность удаленного множества является гомеоморфной цилиндру гиперболической римановой поверхностью, то есть проколотым диском или диском с дырой. В соответствии с этим мы будем называть удаленные области проколами или дырами.

Таким образом, гиперболической римановой поверхности с конечно- порожденной фундаментальной группой отвечает род g, число дыр k и число проколов m. Тройка чисел (g, r, m) будет называться *типом поверхности.*

Задача 5.6. *Докажите, что число проколов гиперболической римановой поверхности H/Γ совпадает с числом классов сопряженности параболических элементов группы* Γ.

Множество $M_{g,k,m}$ классов изоморфности гиперболических римановых поверхностей типа (g, r, m) называется *пространством модулей.* Далее мы покажем, что множество $M_{g,k,m}$ имеет естественную структуру топологического пространства и исследуем его топологию.

Задача 5.7. *Докажите, что* $M_{0,1,1} = \{\Lambda \setminus 0\}$ *и* $M_{0,2,0}$ *гомеоморфно* $\mathbb{R}$.

В духе нашей терминологии естественно считать, что

- $M_{0,0,0} = \{\overline{\mathbb{C}}\}$;
- $M_{0,0,1} = \{\mathbb{C}\}$;
- $M_{0,1,0} = \{\Lambda\}$
- $M_{0,0,2} = \{\mathbb{C} \setminus 0\}$
- $M_{1,0,0} = M_1 \cong H/\mathtt{Mod}$

Нам осталось рассмотреть пространства модулей $M_{g,k,m}$, где $6g + 3k + 2m > 6$. Далее мы рассматриваем только поверхности типа (g, k, m), где $6g + 3k + 2m > 6$. Все они являются гиперболическими.

5.3. **Последовательные наборы автоморфизмов.** Содержание этого и следующих 5 разделов основано на работах лектора начала 70-х годов.

Мы переходим к изучению гиперболических поверхностей, униформизируемых не коммутативными фуксовыми группами.

Для автоморфизмов $C_1, C_2 \in H$ с конечными неподвижными точками на $\mathbb{R}$ положим $C_1 < C_2$, если $\alpha(C_1) \leq \beta(C_1) < \alpha(C_2) \leq \beta(C_2)$.

Набор $\{C_1, C_2, C_3\} \in \mathrm{Aut}(H)$ назовем *последовательным*, если он не содержит эллиптических автоморфизмов, $C_1 \cdot C_2 \cdot C_3 = 1$ и существует $D \in \mathrm{Aut}(H)$ такой, что автоморфизмы $\tilde{C}_i = DC_iD^{-1} (i = 1, 2, 3)$ имеют конечные неподвижные точки и $\tilde{C}_1 < \tilde{C}_2 < \tilde{C}_3$.

Биголоморфный изоморфизм $\varphi : H \to \Lambda$ переводит метрику на H в инвариантную относительно $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ метрику на Λ.

Задача 5.8. *Доказать, что прямыми (т.е.геодезическими) этой метрики на* Λ *являются дуги окружностей, ортогональные* $\partial\Lambda$.

Для геометрических рассуждений удобно перейти от верхней полуплоскости H к диску $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} || z| < 1\}$. Группа его голоморфных автоморфизмов

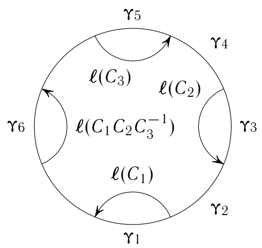
$\mathrm{Aut}(\Lambda)$ также распадается на эллиптические, параболические, гиперболические автоморфизмы, имеющие соответственно 0, 1, 2 неподвижных точек на абсолюте $\partial\Lambda = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

Изоморфизм φ переводит:

- гиперболический автоморфизм $C \in \mathsf{Aut}(H)$ с инвариантной прямой $\ell(C)$ в автоморфизм $\varphi C \varphi^{-1} \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$ с инвариантной прямой $\ell(\varphi(C))$,
- параболический автоморфизм $C \in \mathsf{Aut}(H)$ с неподвижной точкой γ_C в автоморфизм $\varphi C \varphi^{-1} \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$ с неподвижной точкой $\varphi(\gamma_C)$.

Лемма 5.1. *Пусть $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор. Тогда набор $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1, C_3\}$ также последовательный.*

Proof. Неподвижные точки сдвигов C_i разбивают абсолют на 6 дуг γ_i, изображенных на рисунке



Пусть α и β неподвижные притягивающая и отталкивающая точки сдвига $C_1 C_2 C_1^{-1}$. Тогда

$$\ell(C_1 C_2 C_1^{-1}) = C_1 \ell(C_2) \quad \text{откуда} \quad \beta \in \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6.$$

С другой стороны,

$$C_1 \ell(C_2) = C_3^{-1} C_2^{-1} \ell(C_2) = C_3^{-1} \ell(C_2) \quad \text{откуда} \quad \beta \in \gamma_3 \cup \gamma_2 \cup \gamma_1 \cup \gamma_6.$$

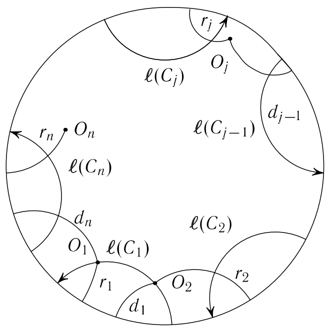
Таким образом, $\beta \in \gamma_6$. Аналогично, $\alpha \in \gamma_6$. То есть $\{C_1 C_2 C_1^{-1}, C_1,\ C_3\}$ тоже последовательный набор. □

Набор $\{C_1, ..., C_n\}$, состоящий из гиперболических автоморфизмов $\{C_1, ..., C_k\}$ и параболических автоморфизмов $\{C_{k+1}, ..., C_n\}$, назовем *последовательным набором типа* $(0, k, n-k)$, если для любого $i = 1, ..., n-1$ наборы $\{C_1 \cdots C_{i-1}, C_i, C_{i+1} \cdots C_n\}$ последовательные.

Задача 5.9. *Пусть $\{C_1, ..., C_n\} \in Aut(\Lambda)$ — последовательный набор. Докажите, что $\ell = C_j C_{j+1} ... C_{n-1} C_n(\ell(C_1))$ лежит между $\ell(C_{j-1})$ и $\ell(C_j)$.*

Далее мы будем рассматривать только фуксовы группа без эллиптических элементов. Поэтому далее под *фуксовой группой* мы будем понимать дискретные подгруппы $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ или $\mathrm{Aut}(H)$, все нетривиальные элементы которых действуют на $\mathrm{Aut}(\Lambda)$ или $\mathrm{Aut}(H)$ без неподвижных точек (то есть являются гиперболическими или параболическими).

Лемма 5.2. *Последовательный набор $V = \{C_1, ..., C_n\} \subset Aut(\Lambda)$ типа $(0, k, m)$ порождает фуксову группу Γ. При этом Λ/Γ — сфера с k дырами и m проколами.*



Proof. Пусть сначала $k > 0$. Рассмотрим точку $O_1 \subset \ell(C_1)$ и положим $O_i = C_i C_{i+1} ... C_n(O_1)$.

Пусть r_i — пересекающий $\ell(C_i)$ геодезический луч с началом в точке O_i и концами в точке абсолюта. Тогда $d_i = C_i^{-1} r_i$ — геодезический луч с концом O_{i+1}. Лучи $\{r_i, d_i (i = 1, ..., n)\}$ ограничивают некомпактную область M.

Дуги $\ell(C_i)$ отсекают от M "хвосты" M_i, выходящие на границу $\partial\Lambda$. Взаимное расположение образов $C_j(M_i)$ этих "хвостов" $C_j(M_i)$ определяется взаимным расположением прямых $C_j(\ell(C_i)$. Следовательно, согласно задаче 5.9, образы "хвостов" $C_1(M_i)$ пересекают $\partial\Lambda$ на участке между $\alpha(C_1)$ и $\beta(C_n)$. При $j > 1$ образы "хвостов" $C_j(M_i)$ пересекают $\partial\Lambda$ на участке между $\alpha(C_j)$ и $\beta(C_{j-1})$.

С другой сторон, взаимное расположение образов "хвостов" $\gamma(M_i)$ и "хвостов" M_i определяют взаимное расположение областей $\gamma(M)$ и M при $\gamma \in\subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$. Следовательно (см рисунок), последовательность многоугольников

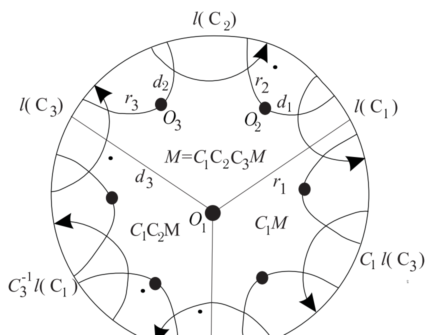
$$M, C_1 M, C_1 C_2 M, ..., C_1 \cdots C_{n-1} M$$

реализует однократный обход вокруг точки O_1, причем $C_1 \cdots C_j \overline{M} \cap \overline{M} = O_1$ при $j < n$.

Таким образом, $\Lambda = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma \overline{M}$, причем области $\gamma_1 M \cap \gamma_2 M = \emptyset$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Отсюда следует, что $\overline{M}$ — фундаментальная область для порожденной $\{C_1, ..., C_n\}$ дискретной группы Γ, действующей без неподвижных точек.

Автоморфизм C_i отождествляет r_i и d_i, образуя на поверхности Λ/Γ дыру при $i \leqslant k$ и прокол при $i > k$. Эта конструкция годится и в случае $k = 0$, если в качестве точки O_1 взять точку, достаточно близкую к неподвижной точке параболического автоморфизма C_1. $\square$

Пример 5.1. *Приведем рисунок отражающий обход вершины O_1 для $k = 3$*



Последовательным набором типа (g,k,m) назовем набор

$$\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_1, ..., C_n\}$$

такой, что $A_i, B_i \quad (i = 1, ..., g)$ — гиперболические автоморфизмы и

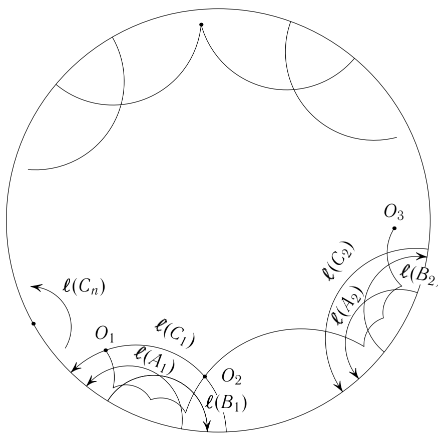
$$\{A_1, B_1A_1^{-1}B_1^{-1}, ..., A_g, B_gA_g^{-1}B_g^{-1}, C_1, ..., C_n\}$$

— последовательный набор типа $(0, 2g+k, m)$.

Будем говорить, что фуксова группа $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ или $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(H))$ — это *фуксова группа типа* (g,k,m), если Λ/Γ (соответственно H/Γ) принадлежит $M_{g,k,m}$.

Теорема 5.1. *Последовательный набор типа* (g,k,m) *порождает фуксову группу* Γ *типа* (g,k,m)

Proof. Пусть $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_{g+1}, ..., C_n\} \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ — последовательный набор типа (g,m,k). При $g = 0$ утверждение следует из леммы 5.2. Пусть $g > 0$. Положим $C_i = [A_iB_i] \quad (i = 1, ..., g)$. Наши определения гарантируют расположение геодезических $\ell(A_i), \ell(B_i), \ell(C_i)$, показанное на рис.



Пусть $O_1 \in \ell(C_1)$ и M — многоугольник, построенный при доказательстве леммы 5.2. При $i \leqslant g$ заменим лучи r_i, d_i на геодезические сегменты с вершинами

$$O_i, A_iB_i^{-1}A_i^{-1}O_i, B_i^{-1}A_i^{-1}O_i, A_i^{-1}O_i, B_iA_iB_i^{-1}A_i^{-1}O_i = O_{i+1}.$$

В результате получим новый многоугольник $\tilde{M}$ (см. рисунок). Используя те же аргументы, что и при доказательстве леммы 5.2, находим, что многоугольники

$$\tilde{M}, A_1\tilde{M}, A_1B_1\tilde{M}, A_1B_1A_1^{-1}\tilde{M}, C_1\tilde{M}, C_1A_2\tilde{M}, C_1A_2B_2\tilde{M},$$

$$C_1A_2B_2A_2^{-1}\tilde{M}, C_1C_2\tilde{M}, ..., C_1C_2\cdots C_{n-1}M$$

реализуют обход вокруг точки O_1 и, следовательно, множество $\{A_1, ..., C_n\}$ порождает фуксову группу Γ. Легко проследить, что каждая пара (A_i, B_i) порождает ручку поверхности Λ/Γ. Поэтому Λ/Γ — поверхность типа (g,k,m). $\square$

5.4. **Геометрия фуксовых групп.** Пусть P — поверхность типа (g, k, m). Систему образующих

$$v = \{a_i, b_i(i = 1, ..., g), c_i(i = g+1, ..., n)\}$$

группы $\pi_1(P, p)$ назовем *стандартной*, если v порождает $\pi_1(P, p)$ с определяющим соотношением

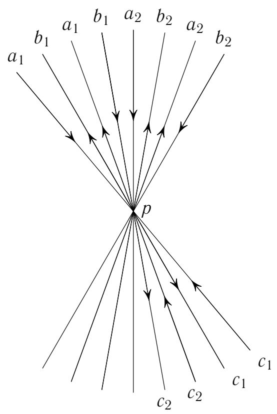
$$\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{i=g+1}^{n} c_i = 1$$

и представляется набором простых контуров

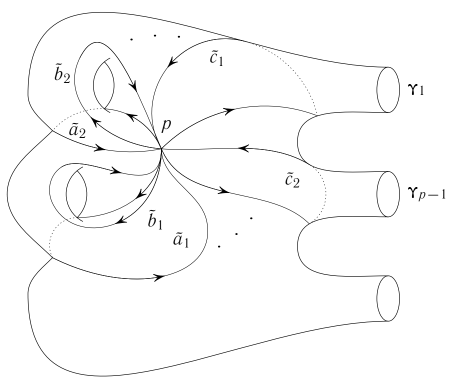
$$\tilde{v} = \{\tilde{a}_i, \tilde{b}_i(i = 1, ..., g), \tilde{c}_i(i = g+1, ..., n)\}$$

со следующими свойствами:

- контур $\tilde{c}_i$ гомологичен 0 и отсекает от поверхности P одну дыру при $i \leqslant g+k$ и один прокол при $i > g+k$;
- $\tilde{a}_i \cap \tilde{b}_j = \tilde{a}_i \cap \tilde{c}_j = \tilde{b}_i \cap \tilde{c}_j = \tilde{c}_i \cap \tilde{c}_j = p$;
- в окрестности точки p контуры $\tilde{v}$ расположены как на рисунке



В этом случае набор контуров $\tilde{v}$ расположен на P как показано на рисунке



Пусть теперь $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Lambda)$ — фуксова группа, $P = \Lambda/\Gamma$, $\Phi : \Lambda \to P$ — естественная проекция и $q \in \Phi^{-1}(p)$. Сопоставим автоморфизму $C \in \Gamma$ ориентированный геодезический отрезок $\ell_q(C) \subset \Lambda$ с началом q и концом $C(q)$. Соответствие $C \mapsto \Phi(\ell_q(C))$ порождает изоморфизм $\Phi_q : \Gamma \to \pi_1(P, p)$.

Лемма 5.3. *Пусть* $V = \{A_i, B_i(i = 1, ..., g), C_i(i = g+1, ..., n)\}$ *— последовательный набор типа* (g, k, m), Γ *— фуксова группа, которую он порождает, и* $P = \Lambda/\Gamma$. *Тогда* $v_q = \Phi_q(V)$ *— стандартная система образующих группы* $\pi_1(P, p)$.

Proof. Рассмотрим фундаментальную область M, построенную при доказательстве леммы 5.2 и теоремы 5.1. При $i > g$ соединим точки O_i и O_{i+1} попарно непересекающимися отрезками $c_i \subset M$. (Здесь $O_{n+1} = O_1$.) Рассмотрим на H геодезические сегменты

$$a_i b_i^{-1} a_i^{-1} = [O_i, A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i], \quad a_i^{-1} = [A_i B_i^{-1} A_i^{-1} O_i, B_i^{-1} A_i^{-1} O_i], \quad c_i^{-1} = [O_i, C^{-1} O_i]$$

Тогда естественная проекция $\Phi : \Lambda \to P$ порождает стандартную систему образующих

$$v_{O_1} = \{\Phi(a_i), \Phi(b_i)(i = 1, ..., g), \quad \Phi(c_i)(i = g+1, ..., n)\} \in \pi_1(P, \Phi(O_1))\}.$$

Непрерывный перенос точки O_1 в q переводит v_{O_1} в стандартную систему образующих v_q. □

Цель этого параграфа — доказать обращение этой леммы.

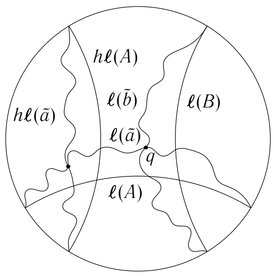
Теорема 5.2. *Пусть* $\Gamma \subset Aut(\Lambda)$ *— фуксова группа типа* (g, k, m), $P = \Lambda/\Gamma$, $\Phi : \Lambda \to P$ *— естественная проекция и*

$$v = \{a_i, b_i(i = 1, ..., g), c_i(i = g+1, ..., n)\}$$

— стандартная система образующих группы $\pi_1(P, \Phi(q))$. *Тогда* $V = \Phi_q^{-1}(v)$ *— последовательный набор типа* (g, k, m).

Для доказательства нам понадобится несколько дополнительных определений и лемм.

Пусть $\tilde{a}$ — контур, представляющий $a \in \pi_1(P, \Phi(q))$. Будем обходить контур $\tilde{a}$, начиная с точки $\Phi(q)$, "поднимая" этот обход на Λ, начиная с точки q. После бесконечного числа обходов в обоих направлениях мы получим линию $\ell(\tilde{a}) \subset M$ с концами в неподвижных точках автоморфизма $A = \Phi_q^{-1}(a)$.



Лемма 5.4. *Если* $\tilde{a}$ *не имеет самопересечений, то* $h\ell(A)$ *и* $\ell(A)$ *не пересекаются при всех* $h \in \Gamma$.

Proof. Пусть $h\ell(A)$ и $\ell(A)$ пересекаются при $h \in \Gamma$. Тогда $h\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{a})$ также пересекаются (см. рис.). □

Лемма 5.5. *Пусть контуры* $\tilde{a}, \tilde{b}$ *представляют элементы* $a, b \in \pi_1(P, \Phi(q))$. *Пусть существует малая деформация контуров* $\tilde{a}$ *и* $\tilde{b}$*, переводящая их в непересекающиеся контуры. Тогда*

$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) = \emptyset.$$

Proof. Если

$$\ell(\Phi_q^{-1}(a)) \cap \ell(\Phi_q^{-1}(b)) \neq \emptyset,$$

то $\ell(\tilde{a})$ и $\ell(\tilde{b})$ пересекаются так, что их пересечение нельзя исключить малой деформацией (см. рис.). □

Лемма 5.6. *Пусть контуры $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ не имеют самопересечений и представляют $c_1, c_2, c_3 \in \pi_1(P, \Phi(q))$ такие, что $c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 = 1$. Пусть существует малая деформация контуров $\tilde{c}_1$,$\tilde{c}_2$ и $\tilde{c}_3$, переводящая их в попарно непересекающиеся контуры. Тогда или набор*

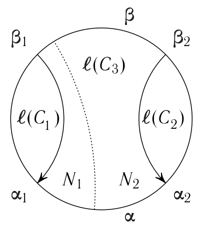
$$\{\Phi_q^{-1}(c_1), \Phi_q^{-1}(c_2), \Phi_q^{-1}(c_3)\},$$

или набор

$$\{\Phi_q^{-1}(c_3^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_2^{-1}), \Phi_q^{-1}(c_1^{-1})\}$$

является последовательным.

Proof. Положим $C_i = \Phi_q^{-1}(c_i)$. Согласно лемме 5.4 $\ell(C_1) \cap \ell(C_2) = \emptyset$. Предположим, что $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на рис.

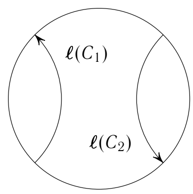


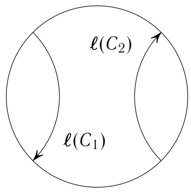
Рассмотрим дуги $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ на $\partial\Lambda$. Тогда $C_1\alpha \subset \alpha$, $C_2\alpha \subset \alpha$, откуда $C_3^{-1}\alpha = C_1C_2\alpha \subset \alpha$. Аналогично $C_3^{-1}\beta \subset \beta$. Таким образом, $\ell(C_3)$ проходит так, как неориентированная линия на последнем рисунке.

Но тогда согласно лемме 5.3 $C_1\ell(C_3) \subset N_1$ и, следовательно, $C_1\beta_2 \in N_1$. Это невозможно, поскольку

$$C_1\beta_2 = C_3^{-1}C_2^{-1}\beta_2 = C_3^{-1}\beta \subset N_2.$$

Таким образом, $\ell(C_1)$ и $\ell(C_2)$ расположены как на одном из следующих рисунков





Аналогичное утверждение верно также для пар (C_2, C_3) и (C_3, C_1). Отсюда следует, что или набор $\{C_1, C_2, C_3\}$, или набор $\{C_3^{-1}, C_2^{-1}, C_1^{-1}\}$ являются последовательным. $\square$

Доказательство теоремы 5.2

Proof. Положим $A_i = \Phi_q^{-1}(a_i), \quad B_i = \Phi_q^{-1}(b_i), \quad C_i = \Phi_q^{-1}(c_i)$. Рассмотрим наборы

$$\{x_1, ..., x_{g+n}\} = \{a_1, b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, a_2, ... b_g a_g^{-1} b_g^{-1}, c_{g+1}, ..., c_n\}$$

и

$$\{X_1, ..., X_{g+n}\} = \{A_1, B_1 A_1^{-1} B_1^{-1}, A_2, ..., B_g A_g^{-1} B_g^{-1}, C_{g+1}, ..., C_n\}.$$

Применяя лемму 5.5 к наборам

$$\{x_1 \cdots x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1} \cdots x_{g+n}\},$$

находим, что или все наборы вида

$$\{X_1 \cdots X_{\ell-1}, X_\ell, X_{\ell+1} \cdots X_{g+n}\},$$

или все наборы вида

$$\{X_{g+n}^{-1} \cdots X_{\ell+1}^{-1}, X_\ell^{-1}, X_{\ell-1}^{-1} \cdots X_1^{-1}\}$$

являются последовательными. То есть или набор $\{X_1, ..., X_{g+n}\}$, или набор $\{X_{g+n}^{-1}, ..., X_1^{-1}\}$ является последовательным. Согласно лемме 5.3, однако, лишь в первом случае контуры, представляющие a_i, b_i, c_i, расположены в окрестности точки p как на соответствующем рисунке. Следовательно, именно набор $\{X_1, ..., X_{g+n}\}$ является последовательным набором типа $(0, 2g + k, m)$ и, значит, набор

$$\{A_i, B_i (i = 1, ..., g), C_j (j = g + 1, ..., n\}$$

является последовательным типа (g, k, m). $\square$

Задача 5.10. *Используя лемму 5.3 и теорему 5.2, докажите, что набор автоморфизмов $\{C_1, \ldots, C_n\}$ является последовательным, если и только если последовательными являются наборы $\{C_1, \ldots, C_{n-2}, C\}$ и $\{C, C_{n-1}, C_n\}$, где $C = (C_{n-1}, C_n)^{-1}$. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольных последовательных наборов типа (g, k, m).*

5.5. **Последовательные наборы типов (0,3,0),(0,2,1) и (0,1,2).** Согласно теоремам 5.1 и 5.2, всякий последовательный набор типа (g, k, m) порождает фуксову группу типа (g, k, m) и всякая фуксова группа типа (g, k, m) порождается последовательным набором. В этом параграфе мы найдем все классы сопряженности последовательных наборов типов $(0, 3, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 2)$. Это удобно делать на верхней полуплоскости.

Лемма 5.7. *Пусть*

$$C_1 z = \lambda_1 z \quad (\lambda_1 > 1), \quad C_2(z) = \frac{(\lambda_2\alpha - \beta)z + (1-\lambda_2)\alpha\beta}{(\lambda_2 - 1)z + (\alpha - \lambda_2\beta)} \quad (\lambda_2 > 1)$$

$$\text{и} \quad C_3 = (C_1 C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ *— последовательный набор, если и только если*

(1) $$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta \leqslant \alpha < \beta < \infty.$$

При этом C_3 *— параболический автоморфизм, если и только если*

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta = \alpha.$$

Proof. По условию

$$C_3^{-1}(z) = C_1 C_2(z) = \lambda_1 \frac{(\lambda_2\alpha - \beta)z + (1-\lambda_2)\alpha\beta}{(\lambda_2 - 1)z + (\alpha - \lambda_2\beta)}.$$

Неподвижные точки автоморфизма C_3 — это корни уравнения $C_3^{-1}(x) = x$, то есть

(2) $$(\lambda_2 - 1)x^2 - (\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)x + \lambda_1(\lambda_2 - 1)\alpha\beta = 0.$$

Следовательно, C_3 — гиперболический или параболический автоморфизм, если и только если

$$(\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)^2 - 4\lambda_1(\lambda_2 - 1)^2\alpha\beta \geq 0$$

. Причем равенство имеет место в точности для параболических автоморфизмов.

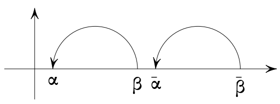
Задача 5.11. *Доказать, что последнее неравенство эквивалентно неравенству*

$$(\alpha + \lambda_1\lambda_2\alpha - \lambda_1\beta - \lambda_2\beta)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(\beta - \alpha)^2 \geq 0,$$

которое, в свою очередь выполняется лишь при

$$\alpha \geq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta \quad \text{или} \quad \alpha \leq \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - 1}\right)^2 \beta.$$

Пусть теперь $\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательный набор и $\bar\alpha \leqslant \bar\beta$ — корни уравнения (2). Тогда $0 < \alpha < \beta < \bar\alpha$,



и, согласно теореме Виета,

$$\frac{\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha}{2(\lambda_2 - 1)} = \frac{\bar\alpha + \bar\beta}{2} > \beta,$$

откуда $\alpha(\lambda_1\lambda_2 - 1) > \beta(\lambda_1 + \lambda_2 - 2)$. Кроме того $\lambda_1\lambda_2 - 1 > \lambda_1 + \lambda_2 - 2$ в виду $\lambda_i > 1$. Следовательно,

$$\alpha > \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2}{\lambda_1\lambda_2 - 1}\beta > \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2 + 2(1 - \sqrt{\lambda_1\lambda_2})}{\lambda_1\lambda_2 - 1 + 2(1 - \sqrt{\lambda_1\lambda_2})}\beta$$

$$= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1\lambda_2 - 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1}\beta = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} - 1}\right)^2 \beta.$$

Таким образом,

$$\alpha \geqslant \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1}\right)^2 \beta.$$

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть

$$0 < \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1}\right)^2 \beta \leqslant \alpha < \beta < \infty$$

и $\bar{\alpha} \leqslant \bar{\beta}$ — корни уравнения (2). Тогда соотношение $\beta < \bar{\alpha}$ эквивалентно паре соотношений

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} > \beta^2, \tag{3}$$

$$(\lambda_2 - 1)\beta^2 - (\lambda_2\beta - \alpha - \lambda_1\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha)\beta + \lambda_1(\lambda_2 - 1)\alpha\beta > 0. \tag{4}$$

Соотношение (3) очевидно ввиду теоремы Виета

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = \lambda_1\alpha\beta \geqslant \lambda_1\left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2} + 1}\right)^2 \beta^2 = \left(\frac{\lambda_1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{1 + \sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 \beta^2 > \beta^2.$$

Соотношение (4) следует из

$$\lambda_2\beta^2 - \beta^2 - \lambda_2\beta^2 + \alpha\beta + \lambda_1\beta^2 - \lambda_1\lambda_2\alpha\beta + \lambda_1\lambda_2\alpha\beta - \lambda_1\alpha\beta =$$
$$= (\lambda_1 - 1)(\beta^2 - \alpha\beta) > 0.$$

Таким образом, $\beta < \bar{\alpha}$. Рассматривая предел $\lambda_1 \to 1$ находим, что $\bar{\alpha}$ — неподвижная притягивающая точка Таким образом,$\{C_1, C_2, C_3\}$ — последовательным набор. $\square$

Задача 5.12. *Пусть*

$$C_1(z) = \lambda z \quad (\lambda > 1), \quad C_2(z) = \frac{(1 - a\gamma)z + a^2\gamma}{-\gamma z + (1 + a\gamma)} \quad (\gamma > 0)$$
$$\text{и} \quad C_3 = (C_1C_2)^{-1}.$$

Тогда $\{C_1, C_2, C_3\}$ *— последовательный набор, если и только если* $a\gamma \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-1}$. *При этом* $C_3 \in Aut_1(H)$, *если и только если* $a\gamma = \frac{\sqrt{\lambda}+1}{\sqrt{\lambda}-1}$.

5.6. **Последовательные наборы типа (1,1,0).**

Лемма 5.8. *Пусть*

$$A(z) = \frac{(\lambda_A\alpha_A - \beta_A)z + (1 - \lambda_A)\alpha_A\beta_A}{(\lambda_A - 1)z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\lambda_B\alpha_B - \beta_B)z + (1 - \lambda_B)\alpha_B\beta_B}{(\lambda_B - 1)z + (\alpha_B - \lambda_B\beta_B)}$$

и

$$C^{-1} = [A, B](z) = \lambda z \quad (\lambda_A, \lambda_B, \lambda > 1).$$

Тогда $\{A, B, C\}$ *является последовательным набором типа (1,1,0), если и только если*

$$-\infty < \alpha_A < \beta_B < \beta_A < \alpha_B < 0, \tag{5}$$

$$(6) \qquad \frac{\alpha_A}{\beta_A} < \sqrt{\lambda}, \quad \frac{\beta_B}{\alpha_B} < \sqrt{\lambda},$$

$$(7) \qquad \lambda_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A} \quad \lambda_B = \frac{\beta_B\sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B\sqrt{\lambda} - \beta_B},$$

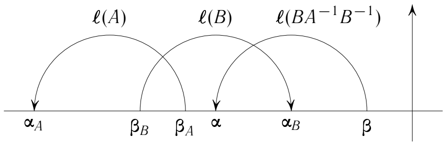
$$(8) \qquad \alpha_B\beta_B\lambda - [(\alpha_A + \beta_A)(\alpha_B + \beta_B) - \alpha_A\beta_A - \alpha_B\beta_B]\sqrt{\lambda} + \alpha_A\beta_A = 0,$$

причем в этом случае

$$A(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_B + \beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Proof. Пусть $\{A, B, C\}$ — последовательный набор типа (1,1,0). Тогда $\{A, BA^{-1}B^{-1}, C\}$ — последовательный набор, откуда $-\infty < \alpha_A < \beta_B < \alpha_B < 0$



Рассмотрим $\widetilde{A} = (AB)A(AB)^{-1} = AC$. Пусть $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ — неподвижные точки автоморфизма $\widetilde{A}$. Тогда

$$\frac{(\lambda_A\alpha_A - \beta_A)\frac{1}{\lambda}z + (1 - \lambda_A)\alpha_A\beta_A}{(\lambda_A - 1)\frac{1}{\lambda}z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)} = \widetilde{A}(z) = \frac{(\lambda_A\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta})z + (1 - \lambda_A)\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}{(\lambda_A - 1)z + (\widetilde{\alpha} - \lambda_A\widetilde{\beta})},$$

откуда

$$\lambda_A\alpha_A - \beta_A = \lambda_A\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}, \quad \lambda(1 - \lambda_A)\alpha_A\beta_A = (1 - \lambda_A)\tilde{\alpha}\tilde{\beta}, \quad \lambda(\alpha_A - \lambda_A\beta_A) = \tilde{\alpha} - \lambda_A\tilde{\beta}.$$

Отсюда следует

$$\lambda_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A}, \quad \lambda_B = \frac{\beta_B\sqrt{\lambda} - \alpha_B}{\alpha_B\sqrt{\lambda} - \beta_B}.$$

В частности,

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\beta_A - \alpha_A\lambda_A}{\alpha_A - \beta_A\lambda_A} > \frac{-\alpha_A\lambda_A}{-\beta_A\lambda_A} = \frac{\alpha_A}{\beta_A} \text{ и, аналогично, } \sqrt{\lambda} > \frac{\beta_B}{\alpha_B}.$$

Подставляя найденные значения для λ_A, λ_B, получаем

$$A(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$B(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_B + \beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Соотношение $[A, B](z) = \lambda z$ влечет (8).

Пусть теперь выполняется (5) – (8). Положим

$$\widetilde{A}(z) = \frac{(\alpha_A + \beta_A)\sqrt{\lambda}z - \alpha_A\beta_A(\sqrt{\lambda} + 1)}{(\sqrt{\lambda} + 1)z - (\alpha_A + \beta_A)},$$

$$\widetilde{B}(z) = \frac{(\alpha_B + \beta_B)z - \alpha_B\beta_B(\sqrt{\lambda}+1)}{(\sqrt{\lambda}+1)z - (\alpha_B+\beta_B)\sqrt{\lambda}}.$$

Тогда $\widetilde{A}(\alpha_A) = \alpha_A$, $\widetilde{A}(\beta_A) = \beta_A$, $\widetilde{B}(\alpha_B) = \alpha_B$, $\widetilde{B}(\beta_B) = \beta_B$. Согласно (8) $[\widetilde{A}, \widetilde{B}] = C^{-1}$. Поэтому $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}^{-1}, C\}$ — последовательный набор. Таким образом, $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, C\}$ — последовательный набор типа (1,1.0).

Из совпадения неподвижных точек следует

$$\widetilde{A}z = \frac{(\widetilde{\lambda}_A\alpha_A - \beta_A)z + (1-\widetilde{\lambda}_A)\alpha_A\beta_A}{(\widetilde{\lambda}_A - 1)z + (\alpha_A - \lambda_A\beta_A)}.$$

Причем, как уже доказано

$$\widetilde{\lambda}_A = \frac{\alpha_A\sqrt{\lambda} - \beta_A}{\beta_A\sqrt{\lambda} - \alpha_A} = \lambda_A.$$

Следовательно, $\widetilde{A} = A$. Аналогично $\widetilde{B} = B$. □

5.7. **Пространство типа Фрике-Клейна-Тейхмюллера.** Для описание пространства модулей $M_{g,k,m}$ удобно использовать вспомогательное пространство $T_{g,k,m}$, гомеоморфное $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$. Впервые оно было построено в технически трудной двухтомной монографии Ф.Фрике и Ф.Клейна (1897, 1912 годы) в терминах длин геодезических гиперболической метрики римановой поверхности. Другое ее описание было дано в работах О.Тейхмюллера (1940 г.) в терминах развитой им теории квазиконформных отображений, обобщающей теорию голоморфных однолистных отображений.

Мы будем считать, что $T_{g,k,m}$ — это множество классов сопряженности последовательных наборов типа (g,k,m), параметризованное притягивающими неподвижными точками $\alpha \in \mathbb{R}$, отталкивающими неподвижными точками $\beta \in \mathbb{R}$ и параметрами сдвигов $\lambda > 1$.

Теорема 5.3. *Пространство $T_{g,k,m}$ изоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$, как вещественное многообразие.*

Proof. В классе сопряженности последовательных наборов типа $(0,3,0)$ имеется ровно один набор (C_1, C_2, C_3) такой что $C_1(z) = \lambda_1 z$, $\lambda_1 > 1$ и $\beta_{C_2} = 1$. Согласно лемме 5.7, множество последовательных наборов (C_1, C_2, C_3) с таким условием описывается числами $(\lambda_1, \lambda_2, \alpha)$, где $\lambda_1, \lambda_2 > 1$ и $\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}{1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\right)^2 < \alpha < 1$. Таким образом, $T_{0,3,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Докажем теперь, с помощью индукции, что пространство $T_{0,k,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{3k-6}$. Согласно задаче 5.10, пространство $T_{0,k,0}$ совпадает с пространством классов сопряженности пар последовательных наборов $\{C_1, \dots, C_{k-2}, C^{-1}\}$ и $\{C, C_{k-1}, C_k\}$. В классе сопряженности таких пар имеется ровно одна пара такая, что $C(z) = \lambda z$, $\lambda > 1$ и $\beta_{C_{k-2}} = -1$. Согласно лемме 5.7, множество последовательных наборов (C, C_{k-1}, C_k) определяется, при этом, положительными параметрами $(\alpha_{C_{k-1}}, \beta_{C_{k-1}}, \lambda_{C_{k-1}})$ с ограничениями $\left(\frac{\sqrt{\lambda_C}+\sqrt{\lambda_{C_{k-1}}}}{1+\sqrt{\lambda_C\lambda_{C_{k-1}}}}\right)^2 \beta_{C_{k-1}} < \alpha_{C_{k-1}} < \beta_{C_{k-1}}$, $\lambda_{C_{k-1}} > 1$. Эти ограничения задают область, гомеоморфную $\mathbb{R}^3$. Используя теперь предположение индукции, находим, что пространство $T_{0,k,0}$ гомеоморфно $T_{0,k-1,0} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3k-6}$.

В классе сопряженности последовательных наборов типа $(1,1,0)$ имеется ровно один набор (A,B,C) такой, что $C(z) = \lambda z$, $\lambda > 1$ и $\alpha_B = -1$. Согласно лемме 5.8, множество последовательных наборов (A,B,C) с таким условием описывается числами $(\lambda, \alpha_A, \beta_A, \beta_B)$, где $-\infty < \alpha_A < \beta_B < \beta_A < -1$, $\frac{\alpha_A}{\beta_A} < \sqrt{\lambda}$, $\frac{\beta_B}{-1} < \sqrt{\lambda}$ и $-\beta_B\lambda - [(\alpha_A + \beta_A)(-1+\beta_B) - \alpha_A\beta_A + \beta_B]\sqrt{\lambda} + \alpha_A\beta_A = 0$ Таким образом, $T_{1,1,0}$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$.

Докажем теперь теорему для поверхностей произвольного типа $(g,k,0)$. Согласно задаче 5.10, пространство $T_{g,k,0}$ состоит из семейств, состоящих из класса сопряженности последовательного набора $\{C_1, \dots, C_{g+k}\}$ типа $(0, g+k, 0)$ и последовательных наборов $(A_1,B_1,C_1), \dots, (A_g,B_g,C_g)$ типа $(1,1,0)$. Согласно лемме 5.8, множество последовательных наборов (A,B,C) типа $(1,1,0)$ с предписанным автоморфизмом C числами описывается числами $(\alpha_A, \beta_A, \alpha_B, \beta_B)$, где $-\infty < \alpha_A < \beta_B < \beta_A < \alpha_B < 0$, $\frac{\alpha_A}{\beta_A} < \sqrt{\lambda}$, $\frac{\beta_B}{\alpha_B} < \sqrt{\lambda}$ и $\alpha_B\beta_B\lambda - [(\alpha_A+\beta_A)(\alpha_B+\beta_B) - \alpha_A\beta_A - \alpha_B\beta_B]\sqrt{\lambda} + \alpha_A\beta_A = 0$ и λ — параметр сдвига автоморфизма C. Пространство $T_{g,k,0}$ гомеоморфно, таким образом, пространству $T_{0,g+k,0} \times (\mathbb{R})^g \cong \mathbb{R})^{6g+3k-6}$.

Общий случай пространства $T_{g,k,m}$ разбирается аналогично и остается в качестве задачи слушателям. $\square$

5.8. **Пространство модулей** $M_{g,k,m}$. Рассмотрим множество $\tilde{T}_{g,k,m}$ всех последовательных наборов типа (g,k,m). Последовательный набор $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_1, ..., C_n\} \in \tilde{T}_{g,k,m}$ порождает группу Γ и, согласно теореме 5.1, риманову поверхность $\Lambda/\Gamma \in M_{g,k,m}$. Полученное отображение $\tilde{\Phi} : \tilde{T}_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$ является сюръективным согласно теореме 5.2.

Группа $\mathsf{Aut}(\Lambda)$ действует на $\tilde{T}_{g,k,m}$, переводя набор $\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_1, ..., C_n\}$ в сопряженный набор $h\{A_1, B_1, ..., A_g, B_g, C_1, ..., C_n\}h^{-1}$, $h \in \mathsf{Aut}(\Lambda)$. Фактор-пространство $\tilde{T}_{g,k,m}/\mathsf{Aut}(\Lambda)$ по определению совпадает с $T_{g,k,m}$. Сопряженным последовательным наборам отвечают изоморфные римановы поверхности. Отображение $\tilde{\Phi}$ порождает, таким образом, сюръективное отображение $\Phi : T_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$.

Исследуем вопрос о том, какие точки пространства $T_{g,k,m}$ переходят в одну и ту же риманову поверхность $P = \Lambda/\Gamma$. Пусть $\mathtt{Hom}(P)$ — группа автогомеоморфизмов поверхности P и $\mathtt{IHom}(P) \subset \mathtt{Hom}(P)$ подгруппа автогомеоморфизмов, изотопных тождественному. Фактор-группа $\mathtt{Mod}(P) = \mathtt{Hom}(P)/\mathtt{IHom}(P)$ *называется группой классов отображений.* Она играет важную роль в маломерной топологии. В ее терминах можно дать, например, классификацию трехмерных топологических многообразий.

Пусть теперь $P = \Lambda/\Gamma$ — риманова поверхность типа (g,k,m) и $T(P)$ — множество последовательных наборов типа (g,k,m), порождающих фуксову группу Γ. Стандартные базисы группы $\pi_1(P,q)$ и группы $\pi_1(P,q')$ назовем *эквивалентными*, если первый базис переходит во второй в результате некоторого непрерывного изменения точки q. Обозначим через $t(P)$ множество классов эквивалентности стандартных базисов фундаментальной группы поверхности P. Лемма 5.3 и теорема 5.2 устанавливают естественное взаимно-однозначное соответствие между множествами $T(P)$ и $t(P)$. Группа классов отображений $\mathtt{Mod}(P)$ транзитивно действует на множестве $t(P)$ и, следовательно, множестве $T(P)$.

Пусть $\phi \in \mathtt{Mod}(P)$, $V \in T(P)$ и $V' \in T(P')$, где $P = \Lambda/\Gamma$ и $P' = \Lambda/\Gamma'$. Элемент $D \in \Gamma$ представляется в виде произведения элементов последовательного набора V. Заменив сомножители этого произведения на соответствующие элементы последовательного набора V', получим $D' \in \Gamma'$. Элемент $\phi(D)$ также представляется в виде произведения элементов последовательного набора V. Заменив сомножители этого произведения на соответствующие элементы последовательного набора V', получим элемент, который мы обозначим $\phi(D')$. Соответствие $D' \mapsto \phi(D')$ задает действие группы $\mathtt{Mod}(P)$ на $T(P')$ и естественный изоморфизм между группами $\mathtt{Mod}(P)$ и $\mathtt{Mod}(P')$. Обозначим группу, получающуюся в результате всех таких изоморфизмов, через $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$.

Таким образом, мы доказали

Лемма 5.9. *Группа $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ естественно действует на пространстве $T_{g,k,m}$, превращая отображение $\Phi : T_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$ во взаимно-однозначное соответствие $T_{g,k,m}/\mathtt{Mod}_{g,k,m} \to M_{g,k,m}$.*

Лемма 5.10. *Группа $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ дискретно действует на $T_{g,k,m}$ гладкими отображениями.*

Proof. Согласно нашим определениям, элемент из $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ определяется представлением элементов одного последовательного набора образующих в виде произведения элементов другого последовательного набора образующих. Поэтому параметры, определяющие новый последовательный набор, выражаются через параметры, определяющие старый последовательный набор по некоторым аналитическим формулам.

Для доказательства дискретности действия группы $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ на множестве $T(\Lambda/\Gamma)$ рассмотрим множество $L(\Gamma)$ параметров сдвигов всех преобразований из Γ. Используя геометрию Лобачевского, нетрудно доказать, что набор $L(\Gamma)$ дискретен, не зависит от порождающего группу Γ последовательного набора, но вычисляется через его параметры. Более того, множество $L(\Gamma)$ мало меняется при малом изменении параметров, определяющий последовательный набор. Таким образом, малая окрестность точки из T не содержит других точек ее орбиты относительно группы $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$. □

Теорема 5.4. *Пространство модулей $M_{g,k,m}$ имеет естественную структуру связного вещественно-аналитического пространства вида $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}/\mathtt{Mod}_{g,k,m}$, где $\mathtt{Mod}_{g,k,m}$ — дискретная группа вещественно-аналитических отображений.*

Proof. Согласно леммам 5.9 и 5.10, множество $M_{g,k,m}$ естественно отождествляется с вещественны аналитическим пространством $T_{g,k,m}/\mathtt{Mod}_{g,k,m}$. Кроме того, согласно теореме 5.3 пространство $T_{g,k,m}$ изоморфно $\mathbb{R}^{6g+3k+2m-6}$. □

Замечание 5.1. *Можно доказать, что пространство модулей $M_{g,0,m}$ имеет даже естественную комплексно-аналитическую структуру. Особенности $M_{g,k,m}$ совпадают с римановыми поверхностями, имеющими не тривиальные голоморфные автоморфизмы.*

6. Гармонические функции.

Как и раньше мы будем отождествлять вещественную плоскость $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\}$ с комплексной плоскостью $\mathbb{C}=\{z\}$, полагая $z=x+iy$. Напомним, что открытое подмножество $D\subset\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ называется *областью.*

Определение 6.1. *Вещественная функция $u(x,y)$ на области D с непрерывными вторыми частными производными называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$, где*

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}$$

— оператор Лапласа.

Гармонические функции естественно возникают при решении широкого круга прикладных задач от гидромеханики до теоретической физики.

Теорема 6.1. *Функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с вещественной частью некоторой голоморфной функции f, т.е. $u(x,y)=\mathtt{Re}f(x+iy)$.*

Proof. Пусть $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ — голоморфная функция. Тогда условия Коши-Римана дают

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

поэтому,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Пусть

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\partial u}{\partial y})$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{\partial u}{\partial y})=-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

, что эквивалентно условиям Коши-Римана на функцию

$$g(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, $g(z)$ — голоморфная функция. Рассмотрим ее первообразную

$$f(x+iy)=\int_{z_0}^{z}g(z)dz=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y})(dx+idy).$$

Тогда

$$\mathtt{Re}f(x+iy)=u(x_0,y_0)+\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy)=u(x,y).$$

□

Задача 6.1. *Доказать, что функция u на связной односвязной области D является гармонической, если и только если она совпадает с мнимой часть некоторой голоморфной функции.*

Тесная связь между гармоническими и голоморфными функциями позволяет легко переносить на гармонические функции многие свойства голоморфных.

Задача 6.2. *Доказать, что на области D:*

- *Гармоническая функция бесконечно дифференцируема, причем все ее частные производные также гармонические.*
- *Биголоморфная замена области определения переводит гармоническую функцию в гармоническую.*
- *Гармонические функции на связном множестве совпадают, если они совпадают на его открытом подмножестве.*

6.1. **Интегральные формулы для гармонической функции.** Далее мы считаем, что граница области ∂D является аналитической кривой, ориентированной как граница области D. Через

$$\frac{\partial}{\partial n} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}$$

будет обозначаться производная по направлению внешней нормали $n = (\cos\theta, \sin\theta)$ к границе ∂D.

Задача 6.3. *Используя формулу Стокса и соотношение*

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

доказать формулу Грина

$$\oint_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \int\int_D (\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}) dxdy + \int\int_D \varphi (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}) dxdy,$$

для дважды непрерывно дифференцируемых в D функций φ, ψ.

Теорема 6.2. *Пусть функции $u(x+iy) = u(x,y)$ и $v(x+iy) = v(x,y)$ гармонические в D и дважды непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint_{\partial D} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) ds = 0,$$

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{|z-\xi|=\rho} u(z) ds$$

при $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} | |z-\xi| < \rho\} \subset D$
и

$$\oint_{z\in\partial D} \{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\} ds = \delta 2\pi u(\xi),$$

где $\delta = 1$ при $\xi \in D$ и $\delta = 0$ при $\xi \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$

Proof. Первая формула сразу следует из задачи 6.3. Рассмотрим функцию

$$v(z) = \mathtt{Re}(\ln(z-\xi)) = \ln|z-\xi|.$$

При $0 < |z-\xi| < \infty$ она является вещественной частью голоморфной функции и, следовательно, гармоническая на $\mathbb{C}\setminus\xi$. Поэтому из уже доказанной части теоремы следует, что

$$\oint_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = 0$$

при $\xi\in\mathbb{C}\setminus\bar{D}$.

Пусть теперь $\xi\in D$. Рассмотрим окрестность $U_\rho = \{z\in\mathbb{C}||z-\xi|<\rho\}\subset D$ и область $D_\rho = D\setminus U_\rho$. Тогда $\xi\in\mathbb{C}\setminus\bar{D}_\rho$ и из только что доказанного утверждения следует, что

$$\oint_{\partial D_\rho}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = 0.$$

Таким образом,

$$\oint_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \oint_{\partial U_\rho}u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi|ds - \oint_{\partial U_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|ds.$$

С другой стороны, $\ln|z-\xi| = \rho$ на ∂U_ρ и, следовательно, второй интеграл равен 0, согласно уже доказанной первой формуле теоремы. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| = \frac{\partial}{\partial r}\ln r|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho}$$

и, следовательно,

$$\oint_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho}u(z)ds.$$

Левая часть равенства не меняется при $\rho\to 0$, откуда,

$$\oint_{\partial D}\{u(z)\frac{\partial}{\partial n}\ln|z-\xi| - \frac{\partial u}{\partial n}\ln|z-\xi|\}ds = \frac{1}{\rho}\oint_{\partial U_\rho}u(z)ds = 2\pi u(\xi).$$

□

6.2. **Функция Грина.**

Определение 6.2. *Функцией Грина $G = G_D$ в области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ называется функция $G(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| + g(z,\xi)$ на $\overline{D}\times\overline{D}$, где*

- *$G(z,\xi) = G(\xi,z)$ и $G(z,\xi') = 0$ при любых $z\in D$ и $\xi'\in\partial D$;*
- *функция $g(z,\xi)$ непрерывна в $D\times D$ и непрерывна по ξ в $\overline{D}$ при любом $z\in D$*
- *функция $g(z,\xi)$ гармонична по z при любом $\xi\in D$ и гармонична по ξ при любом $z\in D$.*

Задача 6.4. *Доказать, что существует не более одной функции Грина.*

Для связной односвязной области, ограниченной жордановыми кривыми, функция Грина существует и выражается через биголоморфное отображение на единичный диск $\Lambda = \{z\in\mathbb{C}||z|<1\}$, существующее согласно теореме Римана.

Теорема 6.3. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связная односвязная область и $w : D \to \Lambda$ биголоморфное отображение на единичный диск. Положим $W(z,\xi) = \frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\overline{w(\xi)}}$. Тогда $G(z,\xi) = G(\xi,z) = \frac{1}{2\pi}\ln|W(z,\xi)|$ — функция для Грина области D.*

Proof. Зафиксируем произвольную точку $\xi \in D$ и рассмотрим $w_\xi(z) = W(z,\xi)$ как функцию от $z \in D$. Эта функция конформно отображает область $D = \{z\}$ на диск Λ и переводит точку $z = \xi$ в 0. В частности, $w_\xi(z) = w_\xi(\xi) + (z-\xi)w'_\xi(\xi) + (z-\xi)o(1)$, где $w_\xi(\xi) = 0$ и $w'_\xi(\xi) \neq 0$.

Таким образом, функция $\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ голоморфна и не обращается в 0. Следовательно, функция $\ln\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ голоморфна и функция $g(z,\xi) = G(z,\xi) - \frac{1}{2\pi}\ln|z-\xi| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{W(z,\xi)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}| = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\ln\frac{w_\xi(z)}{z-\xi}$ гармонична по z при любом $\xi \in D$. Ее симметрия и непрерывность по паре переменных (z,ξ) на $D \times D$ следуют из $w_\xi(z) = W(z,\xi) = w_z(\xi)$. Кроме того, согласно теореме о соответствии границ 3.10 функция $w_\xi(z)$ непрерывна на замыкании $\overline{D}$ и $|w_\xi(\partial D)| = 1$, откуда $G(\partial D,\xi) = 0$ □

Доказанную теорему можно эффективно использовать для вычисления функции Грина в простых областях. В частности:

Для единичного диска Λ отображение $w_\xi(z) = \frac{(z-\xi)}{1-z\bar{\xi}}$ порождает функцию Грина $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}$.

Для правой полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} | \mathtt{Re} z > 0\}$ отображение $w_\xi(z) = \frac{z-\xi}{z+\bar{\xi}}$ порождает функцию Грина $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\frac{z-\xi}{z+\bar{\xi}}|$.

6.3. Задача Дирихле.

Определение 6.3. *Задача Дирихле для области D состоит в отыскании функции u, гармонической в области D и непрерывной на замыкании $\bar{D}$ по ее (ограниченному, непрерывному) значению $u|_{\partial D} = \varphi$ на граничном контуре.*

Задача 6.5. *Доказать, что задача Дирихле имеет не более одного решения.*

Функция Грина дает решение задачи Дирихле в следующем смысле.

Теорема 6.4. *Пусть $G(z,\xi) = G_D(z,\xi)$ — функция Грина в области D. Тогда функция*

$$u(z) = \oint_{\xi\in\partial D}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$$

решает задачу Дирихле для D.

Proof. Гармоничность функции $u(z) = \oint_{\xi\in\partial D}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds$ следует из гармоничности $G(z,\xi)$ по z при любом $\xi \in D$. Осталось доказать, что гармоническая функция $u(z)$ удовлетворяет соотношению

$$u(z) = \oint_{\xi\in\partial D}u(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G(z,\xi)ds.$$

Согласно нашим определениям,

$$G(z,\xi) = \frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi),$$

где $r = |z-\xi|$. Согласно теореме 6.2,

$$2\pi u(z) = \oint_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial \ln r}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\ln r\} ds$$

и

$$\oint_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial g}{\partial n}(z,\xi) - g(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\} ds = 0,$$

при $z \in D$. Следовательно,

$$\oint_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial G}{\partial n}(z,\xi) - G(z,\xi)\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\} ds = \oint_{\xi\in\partial D} \{u(\xi)\frac{\partial(\frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi))}{\partial n} - (\frac{\ln r}{2\pi} + g(z,\xi))\frac{\partial u}{\partial n}(\xi)\} ds = u(z).$$

Кроме того, $G(z,\xi) = 0$ при $\xi \in \partial D$. $\square$

Найденные функции Грина для простых областей позволяют решать для них задачу Дирихле. Функции Грина для диска Λ равна, как мы знаем, $G_\Lambda(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|z-\xi|}{|1-z\bar{\xi}|}$. Положим $z = re^{i\varphi}$, $\xi = \rho e^{i\theta}$. Тогда $\frac{\partial}{\partial n}G(re^{i\varphi}, \rho e^{i\theta}) =$

$$\frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\frac{re^{i\varphi}-\rho e^{i\theta}}{1-r\rho e^{i(\varphi-\theta)}}|_{\rho=1} = \frac{1}{2\pi}\mathtt{Re}\{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}-re^{i\varphi}} + \frac{re^{i(\theta-\varphi)}}{1-re^{i(\theta-\varphi)}}\} = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}.$$

Таким образом, задача Дирихле для диска решается *формулой Пуассона для диска* $|z|<1$:

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}u(e^{i\theta})d\theta.$$

Задача 6.6. *Доказать формулу Пуассона для правой полуплоскости* $\mathtt{Re} z > 0$*:*

$$u(x+iy) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(i\eta)d\eta}{(y-\eta)^2+x^2}.$$

Задача 6.7. *Найти формулы Шварца для диска*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}\mathtt{Re}F(Re^{i\theta})d\theta + iC \quad (|z|<R)$$

и верхней полуплоскости,

$$F(z) = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathtt{Re}F(i\eta)}{(i\eta - z)}d\eta + iC,$$

восстанавливающие голоморфную функцию по значению ее вещественной части на границе.

6.4. **Пространство односвязных областей.** Конформные отображения необходимы для решения широкого круга прикладных задач (аэро и гидро механика, нефтедобыча и др.). Поэтому хотелось бы дополнить теорему Римана о существовании конформного отображения односвязной области D в единичный круг Λ явным построением такого отображения. До недавнего времени это удавалось сделать лишь для простейших многоугольников.

Прогресс в этой проблеме пришел с совершенно неожиданной стороны и оказался связанным с теорией интегрируемых систем, которая разрабатывалась для решения новых проблем математической физики (движение плазмы, теория гравитации и др.). Этот новый подход был разработан около 10 лет назад. Большинство участников этого открытия работают сейчас на нашем факультете (А.В. Забродин, И.М. Кричевер, А.В. Маршаков, Т.Такебе, С.М. Натанзон).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$ всех содержащих ∞ односвязных областей с аналитической границей на сфере Римана, замыкание которых не содержит 0.

В качестве координат в этом бесконечномерном пространстве мы будем рассматривать *гармонические моменты Ричардсона*, предложенные в середине 20 века для решения обратной задачи теории потенциала.

$$t_0 = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} d^2 z, \qquad t_k = -\frac{1}{\pi k}\iint\limits_{Q} z^{-k} d^2 z \quad (k = 1, 2, ...), \qquad d^2 z = dxdy.$$

Можно доказать, что эти функции являются локальными координатами на пространстве $\mathcal{H}$. Функции на пространстве $\mathcal{H}$, которые мы будем рассматривать, не голоморфны по $\{t_k\}$. Поэтому (как мы и раньше поступали в таких случаях) нам будет удобно считать, что эти функции раскладываются в ряд по переменным $\{t_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$. Через $Q^t \in \mathcal{H}$ будет обозначаться область, отвечающая координатам $t = \{t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, ...\}$.

Обозначим через $\mathcal{H}_z \subset \mathcal{H}$ множество областей, содержащих точку $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим область $Q \in \mathcal{H}_z$, точки корой будут обозначаться ξ. Обозначим через $G_Q(z, \xi)$ ее функцию Грина. Сопоставим области Q область Q_ε, получающуюся из области Q сдвигом границы на величину $-\epsilon\pi\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z, \xi)$ в направлении внешней нормали к границе области Q.

Векторные поля на $\mathcal{H}_z$ — это линейные функционалы на множестве заданных на $\mathcal{H}_z$ функций. Обозначим через δ_z векторное поле на $\mathcal{H}_z$, которое переводит функцию $X : \mathcal{H}_z \to \mathbb{C}$ в функцию, принимающую на области Q значение $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}(X(Q_\epsilon) - X(Q))$.

Задача 6.8. *Доказать, что* $\delta_z(t_0) = 1$.

Рассмотрим параметризованное z и $\bar{z}$ семейство дифференциальных операторов от координат $t = \{t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, ...\}$ на $\mathcal{H}$:

$$D(z) = \sum_{k\geq 1}\frac{z^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial t_i}, \quad \bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k\geq 1}\frac{\bar{z}^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_i}, \quad \nabla(z) = \frac{\partial}{\partial t_0} + D(z) + \bar{D}(\bar{z}).$$

Лемма 6.1. *Линейные функционалы* δ_z *и* $\nabla(z)$ *совпадают на множестве* $\{X\}$ *функций на* $\mathcal{H}_z$. *Кроме того,* $\delta_z X = -\pi f(z)$ *для функции вида* $X(Q) = \iint\limits_Q f d^2\xi$, *порожденной гармонической функцией* f *на* Q.

Proof. Пусть $X(Q) = \iint\limits_Q f d^2\xi$. Тогда

$$\delta_z X = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon^2}\iint\limits_{(Q_\epsilon\setminus Q)} f(\xi)(-\epsilon\pi)\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)d^2\xi = -\pi\oint\limits_{\xi\in\partial Q} f(\xi)\frac{\partial}{\partial n}G_Q(z,\xi)ds = -\pi f(z).$$

Координаты t_i и $\bar{t}_i$ при $k > 0$ тоже являются функциями на $\mathcal{H}_z$ рассмотренного вида. Поэтому

$$\delta_z(t_k) = \frac{z^{-k}}{k}, \qquad \delta_z(\bar{t}_k) = \frac{\bar{z}^{-k}}{k}.$$

Отсюда

$$\delta_z(X) = \frac{\partial X}{\partial t_0}\delta_z t_0 + \sum \frac{\partial X}{\partial t_k}\delta_z t_k + \sum \frac{\partial X}{\partial \bar{t}_k}\delta_z \bar{t}_k = (\frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{k\geq 1} \frac{z^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial t_k} + \sum_{k\geq 1}(\bar{z})\frac{\bar{z}^{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k})X.$$

□

Задача 6.9. *Пусть функция X имеет вид $X(Q) = \iint\limits_{\overline{\mathbb{C}}\setminus Q} f d^2\xi$, где f — непрерывная функция на ∂Q. Тогда $\nabla(z)X = \pi f^h(z)$, где $f^h(z)$ — гармоническая в Q функция, совпадающая с f на ∂Q.*

Положим $F(t) = -\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{Q_\circ^t}\iint\limits_{Q_\circ^t} \ln|z^{-1} - \xi^{-1}| d^2z d^2\xi$ **, где** $Q_\circ^t = \overline{\mathbb{C}} - Q^t$**.**

Теорема 6.5. *Функция Грина $G_Q(z,\xi)$ области $Q = Q^t$ выражается через функцию $F = F(t)$ по формуле*

$$G_Q(z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|z^{-1} - \xi^{-1}| + \frac{1}{4\pi}\nabla(z)\nabla(\xi)F.$$

Proof. Зафиксируем точку $z \in Q$. Используя задачу 6.9, находим $\nabla(z)F = -\frac{2}{\pi}\iint\limits_{Q_\circ} \ln|z^{-1} - \xi^{-1}| d^2\xi$. Применяя задачу 6.9, еще раз находим, что $\nabla(\xi)\nabla(z)F$ — это гармоническая функция на Q и совпадающая с функцией $-2\ln|z^{-1} - \xi^{-1}|$ на ∂Q. Таким образом, функция $G_Q(z,\xi)$ удовлетворяет всем аксиомам функции Грина области Q. □

6.5. **Эффективизация теоремы Римана.** Обозначим через $w(z,t)$ биголоморфное отображение области Q^t на внешность единичного круга $\{z \in \overline{\mathbb{C}} | |z| > 1\}$ нормированное условиями $w^t(\infty) = \infty$ и $\mathtt{Im}\partial_z w^t(\infty) = 0$, $\mathtt{Re}\partial_z w^t(\infty) > 0$.

Отображение имеет вид $w(z,t) = p(t)z + \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j(t)z^{-j}$, где в виду нормировки $p(t) \in \mathbb{R}$ и $p'(0) > 0$. В этом параграфе мы найдем функции $p(t), p_0(t), p_1(t), ...$.

Задача 6.10. *Докажите, что $w(z,t) = \sqrt{t_0}z$ при $t = (t_0, 0, 0, \ldots)$.*

Нам понадобится бесконечная система дифференциальных уравнений: *двумерная бездисперсионная цепочка Тоды.* Она была построена в конце 90 годов для нужд математической физики. Для наших целей будет удобно ее описание в виде системы соотношений на частные производные функции $F(t)$. Особую роль при этом играет производная $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t_0}$.

$$(z - \xi)e^{D(z)D(\xi)F} = ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F},$$

$$(\bar{z} - \bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F} = \bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\xi}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\xi})F},$$

$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = \frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

Ее решениями являются функции $F(t)$ от бесконечного числа переменных $t = (t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \dots)$, удовлетворяющие этим дифференциальным уравнениям для любых пар комплексных чисел (z, ξ).

Теорема 6.6. *Функция $F(t)$ удовлетворяет двумерной бездисперсионной цепочке Тоды. Кроме того,*

$$w(z,t) = z\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)).$$

Proof. Используя теоремы 6.3 и 6.5, находим, что

$$\ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right| = 2\pi G_Q(z,\xi) = \ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right| + \frac{1}{2}\nabla(z)\nabla(\xi)F.$$

Умножая на 2, получаем

$$h = \ln\left|\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right|^2 - \ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right|^2 - \nabla(z)\nabla(\xi)F = 0.$$

Переходя к пределу $\xi \to \infty$, находим $-\ln|w(z)|^2 + \ln|z|^2 = \partial_0\nabla(z)F$. Откуда

$$\ln(p) = \lim_{z\to\infty}\ln\left|\frac{w(z)}{z}\right| = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F.$$

Раскладывая h в сумму $h_1 + h_2$ голоморфной, антиголоморфной и постоянной части по z, находим, что функции

$$h_1 = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right) - D(z)\nabla(\xi)F$$

и

$$h_2 = \ln\left(\frac{\bar{w}(z)-\bar{w}(\xi)}{1-\bar{w}(z)w(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{\bar{z}}-\frac{1}{\bar{\xi}}\right) - \bar{D}(\bar{z})\nabla(\xi)F$$

не зависят от z.

Переходя к пределу $z \to \infty$, находим, что

$$h_1 = \ln\left(-\frac{1}{\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right), \quad h_2 = \ln\left(-\frac{1}{w(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\bar{\xi}}\right).$$

Приравнивая два выражения для h_1, находим, что

$$D(z)\nabla(\xi)F = \left(\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{\xi}\right)\right) - \left(\ln\left(-\frac{1}{\bar{w}(\xi)}\right) - \ln\left(-\frac{1}{\xi}\right)\right) =$$

$$\ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{1-w(z)\bar{w}(\xi)}\frac{-z\bar{w}(\xi)}{z-\xi}\right) = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right).$$

Переход к пределу $\xi \to \infty$ дает

$$D(z)\partial_0 F = \ln(p) + \ln\left(\frac{z}{w(z)}\right).$$

Сопоставляя с $\ln(p) = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F$, находим $\ln\left(\frac{w(z)}{z}\right) = -\frac{1}{2}\partial_0^2 F - D(z)\partial_0 F$, что эквивалентно

$$w(z,t) = zexp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)).$$

Голоморфная по ξ часть равенства $D(z)\nabla(\xi)F = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает

$$-D(z)\partial_0 F = D(z)D(\xi)F - \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) - \ln\left(\frac{z}{w(z)}\right) = D(z)D(\xi)F +$$

$$\ln(z-\xi) + \ln\left(\frac{w(z)}{w(z)-w(\xi)}\right) - \ln z$$

, то есть

$$ze^{-\partial_0 D(z)F} = (z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(z)}{w(z)-w(\xi)}.$$

Меняя местами z и ξ, находим

$$\xi e^{-\partial_0 D(\xi)F} = (\xi - z)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(\xi)}{w(\xi)-w(z)} = (z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}\frac{w(\xi)}{w(z)-w(\xi)}.$$

Таким образом,

$$ze^{-\partial_0 D(z)F} - \xi e^{-\partial_0 D(\xi)F} = (z-\xi)e^{D(z)D(\xi)F}.$$

Заменяя (z,ξ) на $(\bar{z},\bar{\xi})$, находим равенство

$$\bar{z}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{z})F} - \bar{\xi}e^{-\partial_0 \bar{D}(\bar{\xi})F} = (\bar{z}-\bar{\xi})e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\xi})F}.$$

Зависящая от $\bar{\xi}$ часть равенства $D(z)\nabla(\xi)F = \ln\left(\frac{w(z)-w(\xi)}{z-\xi}\right) + \ln\left(\frac{\frac{z}{w(z)}}{\frac{1}{-w(z)\bar{w}(\xi)}+1}\right)$ дает

$$D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F = -\ln\left(1 - \frac{1}{w(z)\bar{w}(\xi)}\right),$$

откуда

$$e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = 1 - \frac{1}{w(z)\bar{w}(\xi)}.$$

Подставляя сюда $w(z,t) = z\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t))$, находим

$$1 - e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\xi})F} = \frac{1}{z\bar{\xi}}e^{\partial_0(\partial_0 + D(z) + \bar{D}(\bar{\xi}))F}.$$

□

Задача 6.11. *Доказать, что*

$$\nabla(z)F = v_0 + 2\mathit{Re}\frac{v_k}{k}z^{-1},$$

где

$$v_0 = \partial_0 F = \frac{2}{\pi}\iint\limits_{Q_\circ^t} \ln|z| d^2z, \qquad v_k = \frac{\partial}{\partial t_k}F = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{Q_\circ^t} z^k d^2 z$$

Второе утверждение теоремы 6.6 сводит проблему построения конформного отображения $w(z,t) : Q^t \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \Lambda$ к проблеме явного вычисления функции F как аналитической функции переменных $t = (t_0, t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \dots)$. Функция $F(t)$ представляет и большой самостоятельный интерес. Она независимо возникает в современных моделях математической физики (матричные модели, топологическая гравитация и др.), где также требуется ее представление в виде ряда Тейлора. Интегральная формула для F не позволяет, к сожалению, найти это разложение.

Положение спасает первое утверждение теоремы 6.6 о том, что функция F является решением двумерной бездисперсионной цепочки Тоды. Чтобы искать решения этой системы надо сначала исключить из нее числа z, $\bar{z}$, ξ, $\bar{\xi}$. Для этого надо разложить функции, участвующие в уравнениях в ряды Лорана, по z, $\bar{z}$, ξ, $\bar{\xi}$. В качестве континентов этих рядов выступают полиномы от частных производных функции F. Равенство коэффициентов при одинаковых мономах для правых и левых частей уравнений дает счетную систему дифференциальных уравнений в частных производных.

Удивительным образом оказывается, что эта система имеет единственное решение F, такое что $\exp((-\frac{1}{2}\partial_0^2 - \partial_0 D(z))F(t)) = \sqrt{t_0}$ при $t = (t_0, 0, 0, \dots)$. Более того, эти дифференциальные уравнения позволяют найти нужное нам представление функции F в виде формального ряда

$$F(t) = \frac{1}{2}t_0^2 \ln t_0 - \frac{3}{4}t_0^2 + \sum N_i \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1, \dots, n_k | \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{\bar{k}} \end{array} \right) t_0^{i-(n_1+\dots+n_k+\bar{n}_1+\dots+\bar{n}_{\bar{k}})+2} t_{i_1}^{n_1} \dots t_{i_k}^{n_k} \bar{t}_{\bar{i}_1}^{\bar{n}_1} \dots \bar{t}_{\bar{i}_{\bar{k}}}^{\bar{n}_{\bar{k}}},$$

где сумма берется по $k, \bar{k}, n_r, \bar{n}_r \geqslant 1, 0 < i_1 < \dots < i_k, 0 < \bar{i}_1 < \dots < \bar{i}_{\bar{k}}$,
$i - (n_1 + \dots + n_k + \bar{n}_1 + \dots + \bar{n}_{\bar{k}}) + 2 \geqslant 0$

Более того, для коэффициентов $N_i \left(\begin{array}{c} i_1, \dots, i_k | \bar{i}_1, \dots, \bar{i}_{\bar{k}} \\ n_1, \dots, n_k | \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_{\bar{k}} \end{array} \right)$ удается найти эффективные рекуррентные формулы.

Для тех t, для которых этот формальный ряд сходится, теорема 6.6 позволяет явно найти конформное отображение односвязной области Q с гармоническими моментами Джеферсона t в стандартную область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Lambda$. Примеры простейших отображений такого типа были найдены в дипломной работе выпускника бакалавриата нашего факультета Ивана Почеснева.