**Правительство Российской Федерации**

**Государственное образовательное бюджетное учреждение высшего профессионального образования**

# **«Национальный исследовательский университет**

**«Высшая школа экономики»**

***УТВЕРЖДЕНО***

***Проректор НИУ-ВШЭ***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_С.Ю.Рощин***

***«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2012 г.***

***Одобрена на заседании Учёного совета факультета математики***

***«\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2012 г.***

***Декан факультета математики, д.ф.-м.н.***

***\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_С.К.Ландо***

**ПРОГРАММА**

**кандидатского экзамена по специальности 01.01.06**

**«Математическая логика, алгебра и теория чисел»**

**Москва, 2012 г.**

**Общая часть**

На экзамене кандидатского минимума по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» аспиранты факультета математики должны продемонстрировать знание следующих тем:

(1) Теория множеств: мощность, теорема Кантора-Бернштейна, порядковые числа, принцип трансфинитной индукции, аксиома выбора.

(2) Логика: булевы алгебры множеств, исчисление предикатов, понятие алгоритма, вычислимость по Тьюрингу, классы P и NP.

(3) Теория вероятностей: случайные величины и их распределения, математическое ожидание, дисперсия, независимость и условные вероятности, закон больших чисел, центральная предельная теорема.

(4) Теория групп: группы, подгруппы, смежные классы, гомоморфизмы, факторгруппы, строение конечно порожденных абелевых групп, теоремы Силова, свободные группы, задание групп образующими и соотношениями, простые, разрешимые и нильпотентные группы. Необходимо также знакомство с конкретными примерами групп, включая симметрические, знакопеременные, группы симметрии, матричные группы (полная линейная, специальная линейная), группы вычетов.

(5) Теория колец: кольца, идеалы, факторкольца, прямое произведение колец, китайская теорема об остатках, евклидовы кольца, факториальность, обратимые, простые и неприводимые элементы, простые и максимальные идеалы. Знакомство с конкретными кольцами должно включать комплексные числа, гауссовы целые числа, кольца вычетов, кольца многочленов и степенных рядов, кольца матриц.

(6) Линейная алгебра: векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, двойственность, системы линейных уравнений, жорданова нормальная форма, характеристический и минимальный многочлены, квадратичные формы, положительная определенность, полилинейные формы, симметрическая и внешняя степень векторного пространства.

(7) Теория модулей: тензорное произведение модулей, теорема о строении конечно-порождённых модулей над кольцами главных идеалов и её следствия для групп и линейных операторов.

(8) Теория представлений: лемма Шура, теорема Машке, теория характеров. Необходимо умение классифицировать представления симметрических групп и групп SU(2) и SO(3).

(9) Теория полей: поля, характеристика, структура и автоморфизмы конечных полей, конечные, алгебраические, сепарабельные расширения, основная теорема теории Галуа.

(10) Основы теории чисел: квадратичный закон взаимности, кольца целых полей алгебраических чисел, приближение вещественных чисел рациональными дробями, цепные дроби, теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел рациональными, трансцендентность числа e.

(11) Основы алгебраической геометрии и коммутативной алгебры: нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе, аффинные многообразия, теорема Гильберта о нулях.

(12) Пределы последовательностей и пределы функций, сходимость рядов. Непрерывные функции. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции. Равномерная непрерывность, равномерная сходимость.

(13) Общая топология: открытые и замкнутые подмножества в R^n. Компактность, связность, внутренность и замыкание, всюду плотные и нигде не плотные множества. Непрерывные отображения. Топологические пространства. Хаусдорфовы и метрические пространства. Полнота и пополнение. Теорема Бэра. Компактность. Связность. Нормальность.

(14) Гомотопическая и алгебраическая топология: гомотопные отображения, накрытия, фундаментальная группа, локально тривиальные расслоения, группы гомологий и когомологий, клеточные разбиения, умножение в когомологиях, индекс пересечения на ориентированном многообразии, двойственность Пуанкаре.

(15) Дифференциальное исчисление: производные и дифференциалы отображений из R^m в R^n, теорема о производной сложной функции, ряд Тейлора, способы нахождения экстремумов, множители Лагранжа.

(16) Интегральное исчисление: мера и интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла Лебега, теорема Фубини. Вычисление длин кривых и площадей поверхностей при помощи интегралов.

(17) Геометрия: аффинные и проективные пространства, аффинные и проективные отображения, кривые второго порядка (коники), поверхности второго порядка (квадрики), дробно-линейные отображения.

(18) Комплексный анализ: комплексная производная, голоморфные функции, теоремы Коши и Морера, интегральная формула Коши, теорема о вычетах, принцип сохранения области, принцип максимума модуля, лемма Шварца, теорема Римана о конформном отображении, принцип соответствия границ, принцип симметрии.

(19) Дифференциальные уравнения: теорема существования и единственности, решение уравнений методом разделения переменных, линейные уравнения первого и второго порядков, однородные уравнения, теорема Фробениуса.

Литература.

В.И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984 (и другие издания)

В.И. Арнольд, Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп.-М.: Наука, 1989 (и другие издания)

З. И. Боревич, И. P. Шафаревич, Теория чисел. М: Наука 1985

Б.Л. Ван дер Варден, Алгебра. М.: Наука, 1976

B.А. Васильев, Введение в топологию, М: Фазис 1997

Н. К. Верещагин, А. Шень, Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. Часть 2. Языки и исчисления. Часть 3. Вычислимые функции. М: МЦНМО, 2002. http://www.mccme.ru/free-books/

Э.Б. Винберг, Курс алгебры. М: Факториал 1999

Э. Б. Винберг, Линейные представления групп. М.: Hayка 1985

О.Я. Виро и др., Элементарная топология. М: МЦНМО 2010

И.М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, М: Наука 1971

В.А. Зорич, Математический анализ. М: МЦНМО 2007

A.Н. Колмогоров. С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М: Наука 1976

Э. Мендельсон Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971.

В.В. Прасолов. В.М. Тихомиров, Геометрия. М: МЦНМО 1997

Б.В. Шабат, Введение в комплексный анализ. Лань 2004

И. Р. Шафаревич Основы алгебраической геометрии. М: Наука, 1972.

А.Н. Ширяев. Вероятность, 2 т. МЦНМО, 2007

А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии. М: Наука, 1989

**Специальная часть**

На экзамене кандидатского минимума по специальности 01.01.06 «Математическая логика, алгебра и теория чисел» аспиранты факультета математики также должны продемонстрировать знание одной из следующих тем (в зависимости от своей темы диссертации).

1) Формула МакМагона для числа плоских разбиений, вписанных в данный параллелепипед.

2) Базисы Гельфанда-Цетлина в неприводимых представлениях полной линейной группы.

проф. Б.Л.Фейгин

1) Описание неприводимых полиномиальных представлений группы SL\_n(C).

2) Системы результантов. A – результант. Детерминант комплекса.

3) Алгебра сизигий проективного алгебраического многообразия. Теорема Гильберта о сизигиях.

4) Касательная гипералгебра (алгебра Хопфа распределений в единице) аффинной алгебраической группы над полем положительной характеристики восстанавливает группу однозначно с точностью до накрытия.

5) Исключительные наборы в производных категориях. Исключительный базис производной категории на проективном пространстве. Действие группы кос на исключительных наборах.

проф. А.Л.Городенцев

1) Структура коммутативных алгебра Хопфа.

2) Оснащённые хордовые диаграммы.

проф. С.К.Ландо