

1. Решите логистическое уравнение $x' = x(1 - x)$ разделением переменных. Реализуйте разделение переменных таким образом, чтобы Вы могли придать математический смысл всем промежуточным вычислениям.

2. Найдите автономное уравнение первого порядка, имеющее решение $x(t) = t^5$. Решите получившееся уравнение. (должно получиться **двух**параметрическое семейство!)

3. Рассмотрим автономное уравнение $x' = f(x)$ с непрерывной правой частью.

а) Любое его решение монотонно.

б) Горизонтальная асимптота любого его решения сама является решением. Найдите асимптоты ограниченного решения уравнения $x' = 2^x - x - 1$.

4. (Локсодромы и Меркаторы) Напишите дифференциальное уравнение, описывающее зависимость широты от долготы для корабля, плывущего по компасу на Юго-восток. Решите это уравнение методом разделения переменных. Опишите картографическую проекцию, изображающую все такие траектории прямыми.

Траектории постоянного курса называются локсодромами, и в промежутке между изобретениями компаса и GPS по ним плавали все корабли. Выпрямляющая их проекция изобретена Герардом Меркатором в 16 веке (не путать с Николасом Меркатором, который веком позже изобрел натуральный логарифм, участвующий в формуле Меркаторской проекции).

5. Опишите все дифференцируемые функции $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, которые являются первыми интегралами системы $x' = x, y' = y$. То же для системы $x' = -y, y' = x$.

6. (“Гиперболоид” инженера Гарина) Многие геометрические условия на график функции $x = x(t)$ можно записать соотношениями между значениями $t, x(t)$ и $x'(t)$, и решить полученное уравнение. Найдите форму зеркала, отражающего все лучи из точки O (а) в направлении оси Ox , (б^x) в направлении точки $(1, 0)$.

Один ответ мы все знаем, но теперь можем доказать, что других нет.

7. (Сведение интегрального уравнения к дифференциальному дифференцированием) Найдите распределение плотности по длине стержня, если отрезанный от него левый конец любой длины делится своим центром тяжести в отношении 3 : 1.