1 Вводная лекция

1.1 Теория Струн

- В широком смысле - “основа современной матфизики”: некоторый единый подход к теории элементарных частиц, гравитации и задачам статистической физики.

- Релятивистские струны[1] - следствие конечности максимальной скорости распространения взаимодействия: $c = 299\,792\,458$ м/с - (единственная рациональная физическая константа), одинаковая во всех инерциальных системах отсчета. Часто кладут $c = 1$, т.е. измеряют время в длинах, пройденных светом (вполне разумно). В релятивистской квантовой теории также $\hbar = 1$.

- Теория струн задумывалась как теория *микромира*, а значит должна быть *квантовой*. Струнная длина в планковских единицах $\sqrt{\alpha'} \sim 10^{-33}$ см, $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ - натяжение струны. По другому - планковская длина $l_P = \sqrt{\frac{G_N \hbar}{c^3}}$, а отвечающая ей планковская масса $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \sim 2 \cdot 10^{-5}$ г. (Задача: вывести эти соотношения из размерных соображений: для этого нужно восстановить размерности G_N и $\hbar$ - кванта действия). Единая квантовая теория всех взаимодействий - мечта (давнишняя и новая). Теория струн - пока единственная гипотетически возможная теория квантовой гравитации.

- Шкала масштабов (в электронвольтах - работа по перемещению заряда электрона на 1 Вольт, пользуемся также $E = mc^2$: $1eV \sim 2 \cdot 10^{-33}$ г):
  масса электрона $\frac{1}{2}$ МэВ, масса пи-мезона и/или масштаб сильного взаимодействия Λ_{QCD}: 100-200 МэВ, протона - 1 ГэВ, W или Z бозона - 100 ГэВ, масштаб энергий БАК: порядка 1 $TeV = 10^3$ GeV (залезаем в “большую пустыню”), большого объединения - 10^{15} GeV, а дальше уже планковский или струнный масштаб 10^{19} GeV квантовой гравитации.

[1] В релятивистской теории инвариантная величина - интервал между событиями $c^2(t_1 - t_0)^2 - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2$, группа преобразований - Лоренца: вращения в четырехмерном пространстве с “неправильным” знаком времени (Пуанкаре - добавлены сдвиги).

1.2 Что изучает Теория Струн

Одномерные протяженные релятивистские объекты (открытые и замкнутые, малой длины $\sqrt{\alpha'} \sim 10^{-33}$ см), являющиеся на самом деле системами квантовых (квантованных) полей или частиц. Задачи те же, что у *квантовой теории поля*, но принципиально иной подход.

Основы идейной стороны такого подхода:

- Претензия (пока еще) на роль *фундаментальной* физической теории микромира (которой каноническая КТП быть не может)[2];
- Длина струны - естественное ультрафиолетовое обрезание $l_P = \sqrt{\alpha'}$. В теории конденсированного состояния - атомный масштаб 1 ангстрем $\sim 10^{-8}$ см. (Инфракрасное обрезание - размер Вселенной или компактного многообразия, в котором живет теория - *target space*). Крайне нетривиальное поведение замкнутых струн на компактных многообразиях;
- Попытка поставить более фундаментальные вопросы - о геометрии (уже размерности!) пространства, естественности сигнатуры Минковского - времени, непертурбативных (больших!) эффектах. Именно поэтому представляет собой ценность для математиков (струны на нетривиальных многообразиях итп);
- Если называть теорию квантовых частиц первично-квантованной, а теорию квантовых полей - вторично-квантованной, то струны - идейно именно первично-квантованная теория (хотя аппаратно вовсю используется *двумерная* вторично-квантованная теория). Вторично-квантованной струнной теории в нормальном виде не существует, одно из объяснений кроется в геометрических свойствах пространств модулей комплексных кривых.

Но:

- Идей много, а толку пока мало - теория НЕ создана (в отличие от КТП, *предсказывающей* худо-бедно реально наблюдаемые процессы с рождением частиц, и вклад в них античастиц);

[2]Забавно, что в 70-е годы прошлого века думалось совсем наоборот.

- Обладает определенными патологиями, например - тахионами, но с шансами от них избавиться. Иерархия возможностей:
  - квантовая механика частиц - простая, математически строгая наука,
  - квантовая механика струн (двумерная КТП) - многообещающая,
  - квантовая механика мембран - не существует без внутренних противоречий!

(Напрашивается аналогия с моделями Изинга!)

1.3 Классическая механика частиц: напоминание

Принцип наименьшего действия - *не следует* ниоткуда.

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}; t) dt = S[q, \dot{q}; T], \tag{1}$$

- Функционал на траекториях (достаточно гладких), отображений отрезка в многообразие $q : [0, T] \mapsto \mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^D$;
- Зависит только от (обобщенных) координат и скоростей, гладкие траектории - "большие системы", $S \gg \hbar$;
- На траекториях $\delta S = 0$.

Уравнения движения:

$$\begin{gathered} \delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \\ + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) \end{gathered} \tag{2}$$

С зафиксированными концами $\delta q|_{0,T} = 0$, поэтому на экстремали

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, \dim M \tag{3}$$

уравнения Эйлера-Лагранжа. Для гамильтоновой формулировки и квантования - импульсы: $p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(t)$ или $p_i(T) = \frac{\partial S}{\partial q_i(T)}$.

Почему все это естественно? Свободное движение (принцип относительности)

$$L_{\text{free}}(q, \dot{q}; t) = L_{\text{free}}(\dot{q}) = L_{\text{free}}(\dot{q}^2) = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 \tag{4}$$

А что еще? Вообще говоря:

$$L(q, \dot{q}) = -U(q) + A_i(q)\dot{q}_i + \tfrac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \dots \tag{5}$$

просто разложение по степеням производных.

- Члены выше квадратичных писать "не нужно"(?!) - несущественны при медленных изменениях;
- $U(q)$ - скалярный потенциал взаимодействия, $A_i(q)$ - вектор-потенциал (магнитное поле), $g_{ij}(q)$ - метрика (движение на “кривом” многообразии). Заряды для простоты - единичны.

Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}^D$, $g_{ij}(q) = m\delta_{ij}$, тогда уравнения движения

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \partial_i A_j \dot{q}_j, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + A_i(q) \\ m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - F_{ij}\dot{q}_j = f_i(q, \dot{q}; t), \\ F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i\end{gathered} \tag{6}$$

представляют собой 2-й закон Ньютона для силы в потенциальном и в магнитном полях (сила Лоренца).

- Закон Ньютона - утверждение, что классическая механика описывается дифференциальными уравнениями 2-го порядка: состояние системы определяется её координатами и скоростями (импульсами), взаимодействие зависит них же. Дифференциальное уравнение вычисляет ускорения по координатам и скоростям и задает (однозначно!) состояния системы в последующие моменты времени.
- Вид естественных в природе взаимодействий почти однозначно определяется простыми свойствами действия - больше практически ничего нельзя написать! Более сложные явления - явная зависимость

от времени нестационарность (неравновесность в статфизике) и т.п. - более характерны для “неэлементарных” систем[3].

Связи с помощью множителей Лагранжа, дополнительные переменные-координаты без соответствующих скоростей

$$L(q,\dot{q}) \to L(q,\dot{q}) + \sum_K \lambda_K(t) T_K(q,\dot{q})$$

1.4 Релятивистская частица

Обозначения: $s^2 = -(x_1 - x_0)^\mu (x_1 - x_0)_\mu$, $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$, $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ (этот выбор будет меняться!).

Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[X] = \kappa \int ds = \kappa \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = \kappa c \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{X}}^2} \tag{7}$$

Забудем про время - длина дуги в пространстве: $dl = \left|\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right| d\tau$, $L = \int dl = \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right)}$. Дальше - добавили время и изменили знак под корнем, так как для времениподобного интервала $dx^\mu dx_\mu < 0$ (по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование!). В нерелятивистском пределе[4]

$$\begin{aligned} S[X] \underset{c\to\infty}{\to} \kappa c \int dt \left(1 - \frac{1}{2c^2}\dot{\mathbf{X}}^2 + \ldots\right) \overset{?}{=} \\ \overset{?}{=} \mathrm{const} + \int dt \frac{m}{2}\dot{\mathbf{X}}^2 + O(1/c) \end{aligned} \tag{8}$$

т.е. $\kappa = -mc$. А релятивистское свободное действие - не квадратично?

Введем произвольный параметр на траектории:

$$S[X] = -mc \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \tag{9}$$

[3]Буквально последнее верно для "мира без гравитации”. "Большой мир” гравитации очевидно нестационарен и неравновесен, но сама идея применения микротеории струн к макромиру вызывает сомнения (и большие опасения)

[4]Наименьшее действие $S \sim \langle V^2 \rangle \geq \langle V \rangle^2$.

где теперь $\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}$, а τ - вовсе не обязательно t. (В книге ЛЛ пользуются $\tau = s$, $\frac{dX^\mu}{d\tau}$ - 4-скорость). Уравнения движения

$$\begin{aligned} \delta S[X] &= mc \int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} = \\ &= mc \frac{\dot{X}_\mu \delta X^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \Bigg| - \int d\tau \delta X^\mu \frac{d}{d\tau} \frac{mc\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \end{aligned} \tag{10}$$

т.е.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \qquad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial X^\mu} \tag{11}$$

Действие (9) вообще от выбора τ не зависит, т.е. инвариантно относительно любых замен

$$\tau \to \tau' = f(\tau), \qquad f(\tau_0) = \tau_0, \quad f(\tau_1) = \tau_1 \tag{12}$$

“длина” не зависит от выбора параметризации кривой.

Это действие легко переписать в квадратичном виде

$$S[X] \to S[X, e] = \tfrac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2} m^2 c^2 \int e(\tau) d\tau \tag{13}$$

не теряя инвариантности, если $e(\tau)d\tau = e(\tau')d\tau'$. Действительно

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2 c^2 = 0 \tag{14}$$

дает $e = \frac{1}{mc}\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}$, и после подстановки назад в действие

$$S[X, e] \to \tfrac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2} m^2 c^2 \int e(\tau) d\tau = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \tag{15}$$

получаем старый результат. Но: действие (13) - квадратично по X-м и не содержит производных от $e(\tau)$, т.е. у $e(\tau)$ “нет динамики”, и его можно выбрать в любом виде, например $e(\tau) = \mathrm{const}$, “одномерная геометрия” - почти тривиальна. Динамика (по вспомогательному параметру τ, который вынужден играть роль времени) переменных $\{X^\mu(\tau)\}$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\dot{X}^\mu}{e} = 0 \tag{16}$$

при этом линейна. Кроме того, для $S[X, e]$ существует нетривиальный предел $m \to 0$ - безмассовая частица, движущаяся со скоростью света.

1.5 Электромагнитное поле

Взаимодействие

$$S \to S_0 - \frac{1}{c}\int A_\mu(X)dX^\mu = S - \frac{1}{c}\int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \\ \underset{\tau=t}{=} S + \int dt\left(\frac{1}{c}\mathbf{A}(\mathbf{X},t)\dot{\mathbf{X}} - \varphi(\mathbf{X},t)\right) \tag{17}$$

естественный линейный по производным член. Электромагнитное взаимодействие с векторным и скалярным потенциалами. Сила взаимодействия

$$\delta\int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \int\left(\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu \dot{X}^\mu + A_\mu \delta\dot{X}^\mu\right) \simeq \\ \simeq \int\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\delta X^\nu \dot{X}^\mu \tag{18}$$

т.е. $\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu = \frac{1}{c}F_{\mu\nu}\dot{X}^\nu$, где $p_\mu = \frac{\delta S_0}{\delta X^\mu}$, а

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

при стандартных выражениях $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$.

Законы электромагнетизма релятивистски-инвариантны! Мы вывели это из общих принципов “ничего не делая” ...

Вопрос: можно ли вывести отсюда уравнения Максвелла?

1.6 Струна Намбу

А если та же картина - двумерная? Для начала - в нашем родном 3-мерном евклидовом пространстве: элементарная площадь

$$
\begin{gathered}
dA = d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| = \\
= d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| \sin\theta = d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| \sqrt{1-\cos^2\theta} = \\
= d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right)^2}
\end{gathered}
\tag{20}
$$

а полная площадь

$$
A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\det \left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right) & \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau}\right) & \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma}\right) \end{matrix} \right\|}
\tag{21}
$$

Для сигнатуры Минковского и произвольного числа пространственно-временных координат получим действие Намбу-Гото

$$
\begin{gathered}
S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det_{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu} = \\
= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu \partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu + (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Ничего хорошего - кроме как площадь двумерной поверхности, вложенной в плоское $\mathbb{R}^D$ (с “неправильным знаком” у времени - про это все время хочется забыть). Однако, аналогично частице можно написать

$$
S[X,g] = -\tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu
\tag{23}
$$

где $g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$ - “внутренняя метрика” на поверхности Σ, вообще говоря не связанная с индуцированной (прямой аналог собственной длины $e(\tau)d\tau$ на траектории), $g = \det_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$. Уравнения движения:

$$
\frac{\delta}{\delta X_\mu} S[X,g] = \partial_\alpha \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0
\tag{24}
$$

- уравнения Лапласа (с неправильным знаком), при $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ просто волновое уравнение $\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$, $X^\mu(\tau,\sigma) = f^\mu(\tau-\sigma) + g^\mu(\tau+\sigma)$; а

$$-\frac{1}{T\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}}S[X,g] = \tfrac{1}{2}\left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}X^\mu\partial_{\beta'}X_\mu\right) \equiv t_{\alpha\beta} \tag{25}$$

и если $t_{\alpha\beta} = 0$, то очевидное решение $g_{\alpha\beta} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$. Подставляя в $S[X,g]$ получаем действие Намбу.

- $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma,\tau)\eta_{\alpha\beta}$ - квадратичная теория при произвольном $\rho(\sigma,\tau)$ - свойство 2-х измерений

$$\begin{aligned} S = -\tfrac{1}{2}\,T\int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu = \\ = -\tfrac{1}{2}\,T\int d\tau d\sigma\left(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu\right) \end{aligned} \tag{26}$$

- Теория релятивистской струны - аналог точечной частицы, вместо траекторий - цилиндры, $0 \le \sigma \le 2\pi$, $X^\mu(\sigma,\tau) = \sum_n e^{in\sigma}X_n^\mu(\tau)$ - бесконечный набор релятивистских частиц.

- Естественное взаимодействие

$$S \to -\tfrac{1}{2}\,T\int_\Sigma d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(X) - \frac{1}{c}\int_{\partial\Sigma} A_\mu dX^\mu \tag{27}$$

  по-прежнему с электромагнитным полем (на границе) и с метрикой пространства-времени $G_{\mu\nu}(X)$ на мировом листе - гравитация! Естественное объединение векторных полей и метрики.

- То, что $\rho(\sigma,\tau)$ пропадает из свободного действия связано со свойством $g^{\alpha\beta}t_{\alpha\beta} = 0$ - двумерная конформная теория поля.

1.7 Заключение к введению

Из ничего вывели все:

- Действие релятивистской частицы и её естественное взаимодействие с электромагнитным полем;

- Действие релятивистской струны, но струны ненаблюдаемы - квантовая теория: релятивистская квантовая механика и квантовая теория поля;
- Струна как бесконечный набор частиц, статистический ансамбль - описывается часто в терминах статистической физики;
- Двумерные конформные теории, голоморфная факторизация (левые и правые волны) - комплексный анализ и теория римановых поверхностей. Новые области математики в физике!

1.8 Как изучать

Изучать теорию струн можно долго и безуспешно.

- Продвинутый уровень включает: квантовую теорию поля, двумерные конформные и суперсимметричные калибровочные теории, интегрируемые системы. В общем - математические основы естествознания ...
- В принципе предполагает знание квантовой механики и основ квантовой теории поля, но возможен и "противоположный" путь.
- Струнная математика: комплексная геометрия (Римановы поверхности, многообразия Калаби-Яо,...); представления бесконечномерных алгебр (Каца-Муди, Вирасоро,...); зеркальная симметрия и другие проблемы геометрии многообразий, модулярные формы - вплоть до теории чисел, некоммутативный анализ и геометрия ...
- Вводный уровень ("матметоды естествознания", лекции и задачи). Продвинутое изучение - самостоятельное (книга Дж.Польчинского итп, в рамках самостоятельного НИСа).
- Литература: Поляков, Польчинский, Цвибах, Грин-Шварц-Виттен, сестры Бекер-Шварц; обзоры итп.

1.9 Темы для самостоятельного изучения

- Двумерная конформная теория поля, инвариантность относительно действия конформных преобразований. Альтернативный аксиоматический подход к КТП - конформный бутстрап. Независимо от струн - вычисление точных аномальных размерностей операторов в КТП из теории представлений бесконечномерных алгебр Ли (алгебра Вирасоро). В теории струн амплитуды рассеяния строятся из корреляционных функций двумерных конформных теорий поля.

- Континуальный интеграл Полякова: одно из базовых определений теории струн. Мера интегрирования по вложениям мировых листов и по двумерным геометриям (всем физически различным конфигурациям). Ограничения на геометрию таргет-пространства (размерность итп) из аномалии в двумерной теории.

- Струны на компактных многообразиях и Т-дуальность. Зеркальная симметрия.

- Приветствуется любая собственная инициатива.