1 Вводная лекция

2 Классическая струна Полякова

2.1 Действие Намбу и действие Полякова

Для сигнатуры Минковского (и на мировом листе и в пространстве-времени) вспоминаем действие Намбу-Гото

$$\begin{gathered} S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det_{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu} = \\ = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu \partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu + (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ничего хорошего - кроме как площадь двумерной поверхности, вложенной в плоское $\mathbb{R}^D$ (с "неправильным знаком" у времени - про это все время хочется забыть). Однако, аналогично частице можно написать

$$S[X, g] = -\tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{2.2}$$

где $g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$ - "внутренняя метрика" на поверхности Σ, вообще говоря не связанная с индуцированной (прямой аналог собственной длины $e(\tau)d\tau$ на траектории), $g = \det_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$. Вычислим вариацию по метрике на мировом дисте

$$\delta_g S[X, g] = -T \int_\Sigma d^2\sigma \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \tag{2.3}$$

Пользуясь

$$\begin{gathered} \delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta \det g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} g g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \\ \delta(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) = \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta\sqrt{-g} = \\ = \sqrt{-g} \left(\delta g^{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha'\beta'} \delta g^{\alpha'\beta'} \right) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} -\frac{1}{T\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} S[X, g] = \\ = \tfrac{1}{2} \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu \right) \equiv t_{\alpha\beta} \end{gathered} \tag{2.5}$$

и если $t_{\alpha\beta} = 0$, то очевидное решение $g_{\alpha\beta} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$. Подставляя в $S[X, g]$ получаем действие Намбу.

В действие (2.2) метрика не является динамической переменной, так как входит без производных. Вообще говоря, пользуясь идеологией "разложения по производным" мы могли бы добавить к действию Полякова по крайней мере

$$S[X, g] \to S[X, g] + \int_\Sigma d^2\sigma \left(\mu_0^2 \sqrt{-g} + Q_0 R^{(2)} \sqrt{-g} + \ldots\right) \tag{2.6}$$

т.е. буквально двумерное действие Гильберта-Эйнштейна, содержащее космологическую постоянную μ_0^2 и скалярную кривизну двумерной метрики - с точностью до старших производных. На классическую теорию струн член с кривизной не влияет (почему?), а космологическая постоянная в классике должна быть равна нулю. В квантовой же теории струн оба эти члена оказываются существенными, но недостаточными для ее непротиворечивости, и в правую часть необходимо дописать еще кое-что.

2.2 p-браны

На самом деле наш вывод не ограничивает двумерность мирового листа. Практически все формулы можно написать для произвольной размерности $p + 1$

$$\begin{aligned} S[X, g] = -\tfrac{1}{2}\, T_p \int_\Sigma d^{p+1}\sigma \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \\ + \int_\Sigma d^{p+1}\sigma \left(\Lambda_p \sqrt{-g} + \ldots\right) \end{aligned} \tag{2.7}$$

так что $p = 0$ - частица, $p = 1$ - струна, $p = 2$ - мембрана, а все случаи $p > 2$ - принято называть p-бранами. Формула (2.7) уже не самосогласована в смысле разложения по производным, но добавление слагаемого с кривизной уже сделает при $p \geq 2$ гравитацию динамической.

2.3 Действие Полякова и уравнения движения

Теперь выведем уравнения движения по координатам струны

$$\begin{aligned}\delta_X S[X,g] &= -T\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\delta X^\mu\partial_\beta X_\mu = \\ &= -T\int_\Sigma d^2\sigma\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta X^\mu\partial_\beta X_\mu\right) + \\ &+T\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-g}\delta X^\mu\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X_\mu\end{aligned} \tag{2.8}$$

Начнем с конца: чтобы занулить этот вклад, от интеграла по всему мировому листу Σ при произвольной вариации δX^μ, нужно потребовать

$$\Delta X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu = 0 \tag{2.9}$$

т.е. двумерное уравнение Лапласа (в метрике с сигнатурой Минковского - волновое) на все координаты струны $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$; при $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ просто волновое уравнение $\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$, $X^\mu(\tau,\sigma) = f^\mu(\tau-\sigma) + g^\mu(\tau+\sigma)$.

2.4 Граничные условия и D-браны

Первый же член в правой части (2.8) высаживается на границу мирового листа $\partial\Sigma$:

$$\int_\Sigma d^2\sigma\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\delta X^\mu\partial_\beta X_\mu\right) = \int_{\partial\Sigma} dl\delta X^\mu n^\alpha\partial_\alpha X_\mu \tag{2.10}$$

где $d\xi$ - инфинитезимальный интервал вдоль границы, а $n_\alpha = n_\alpha(\xi)$ - вектор в перпендикулярном ей направлении. И вот чтобы занулить этот член - возможны варианты:

- $\partial\Sigma = \emptyset$, границы мирового листа нет;
- $\delta X|_{\partial\Sigma} = 0$ или $n^\alpha\partial_\alpha X|_{\partial\Sigma} = 0$, т.е. граничные условия Дирихле или Неймана;

- Вспомним, что координат у струны в D-мерном пространстве много: случай общего положения - когда часть из них $(p+1)$ - удовлетворяют условиям Неймана, а остальные - Дирихле, т.е. струне разрешается свободно двигаться вдоль некоторой $(p+1)$-мерной гиперповерхности в D-мерном таргет-пространстве. Такие конфигурации называются Dp-бранами, или D-бранами соответствующей размерности, где D происходит от Dirichlet.

Посмотрим, что это означает для банального выбора $g_{\alpha\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta = \eta_{\alpha\beta}d\sigma^\alpha d\sigma^\beta = -(d\tau)^2 + (d\sigma)^2$. По направлению τ - зависит от постановки задачи, например - фиксированные контура $X_i(\sigma)$ и $X_f(\sigma)$ в начальной при $\tau = \tau_i$ и конечной при $\tau = \tau_f$ конфигурациях. По направлению σ

- $X^\mu(\sigma + l, \tau) = X^\mu(\sigma, \tau)$, замкнутая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\frac{2\pi i n\sigma}{l}} X^\mu_n(\tau)$, $\bar{X}^\mu_n = X^\mu_{-n}$;
- $\partial_\sigma X^\mu|_{\sigma=0,l} = 0$, открытая струна, в разложении Фурье $X^\mu(\sigma,\tau) = \sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{\pi n\sigma}{l}\right) X^\mu_n(\tau)$.

В случае открытой струны - бесконечный набор релятивистских частиц, в случае замкнутой - ("дважды") бесконечный набор.

2.5 Симметрии действия Полякова

- Двумерная репараметризационная инвариантность:

$$(\tau,\sigma) \to (\tilde{\tau}(\tau,\sigma), \tilde{\sigma}(\tau,\sigma))$$

Ей можно "убить" две из трех независимых компонент двумерной метрики. Самая часто используемая калибровка - конформная

$$ds^2 = \rho(\sigma,\tau)\left(d\sigma^2 - d\tau^2\right) \tag{2.11}$$

где $\rho(\sigma,\tau)$ - произвольная функция. Иногда пользуются конусной калибровкой

$$ds^2 = d\sigma^+ d\sigma^- + g_{++}(d\sigma^+)^2, \qquad \sigma^\pm = \sigma \pm \tau \tag{2.12}$$

- Вейлевская симметрия: $g_{\alpha\beta} \to \Lambda(\sigma,\tau) g_{\alpha\beta}$. Из-за этой симметрии в конформной калибровке $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma,\tau)\eta_{\alpha\beta}$ классическое действие не зависит от $\rho(\sigma,\tau)$ - свойство 2-х измерений. То, что $\rho(\sigma,\tau)$ пропадает из свободного действия связано со свойством $g^{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} = 0$ - двумерная конформная теория поля.

$$\begin{aligned} S = -\tfrac{1}{2}\, T \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu = \\ = -\tfrac{1}{2}\, T \int d\tau d\sigma \left(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

- Симметрия Пуанкаре в D-мерии. Генераторы симметрии

$$\begin{aligned} J^{\mu\nu} = T \int d\sigma \left(\dot{X}^\mu X^\nu - X^\mu \dot{X}^\nu\right) \\ P^\mu = -T \int d\sigma \dot{X}^\mu \end{aligned} \tag{2.14}$$

Очевидно из следующего рассуждения (проверим для последнего выражения). Рассмотрим симметрию действия относительно сдвигов $X^\mu \to X^\mu + \xi^\mu$ и сделаем параметры зависящими от координат на мировом листе. Тогда вариация действия

$$\delta S = T \int d\tau d\sigma \left(\dot{X}_\mu \dot{\xi}^\mu - X'_\mu \xi^{\mu\prime}\right) = \int d\tau d\sigma P^\alpha_\mu \partial_\alpha \xi^\mu \tag{2.15}$$

где

$$\partial_\alpha P^\alpha_\mu = X'_\mu - \dot{X}_\mu = 0 \tag{2.16}$$

в силу уравнений движения. Интенифизимальный сдвиг можно “сгенерировать” соответствующей скобкой Пуассона

$$\begin{aligned} \delta_\xi X^\mu(\tau,\sigma) = \xi^\nu \{P_\nu, X^\mu(\tau,\sigma)\} = \\ = \xi^\nu T \int d\tilde{\sigma} \{X^\mu(\tau,\sigma), \dot{X}_\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \xi^\mu \end{aligned} \tag{2.17}$$

пользуясь каноническими скобками Пуассона $\{X^\mu(\tau,\sigma), \dot{X}_\nu(\tau,\tilde{\sigma})\} = \frac{1}{T}\delta^\mu_\nu \delta(\sigma - \tilde{\sigma})$.