# ПУЧКИ И ГОМОЛОГИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

## ЛИСТОК 1: ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ОБРАЗЫ

Осень 2013 года

Пусть $I$ — частично упорядоченное множество. Диаграммой множеств (или абелевых групп), индексированной $I$, называется набор множеств (или абелевых групп) $A_i$, заданных для всех $i \in I$, и отображений (гомоморфизмов абелевых групп) $\phi_{j,i} \colon A_i \longrightarrow A_j$, заданных для всех $i \leqslant j \in I$, таких что $\phi_{i,i}$ суть тождественные отображения и композиции $\phi_{k,j} \circ \phi_{j,i}$ равны $\phi_{k,i}$ для всех $i < j < k$. Диаграмма называется *направленной*, если для любых $i$, $j \in I$ найдется $k \in I$, такое что $i \leqslant k$ и $j \leqslant k$.

*Прямым* (или *индуктивным*) *пределом* $\varinjlim_{i \in I} A_i$ направленной диаграммы $(A_i)$ называется множество всех пар $(i, a)$, где $a \in A_i$, профакторизованное по следующему отношению эквивалентности: пары $(i, a)$ и $(j, b)$ эквивалентны, если найдется такое $k \in I$, что $i \leqslant k$, $\ j \leqslant k$, и $\phi_{k,i}(a) = \phi_{k,j}(b)$.

**Задача 0.** а) Если $(A_i)$ — направленная диаграмма абелевых групп, определите структуру абелевой группы на множестве $\varinjlim_{i \in I} A_i$.

б) Пусть $(A_i)$ — направленная диаграмма множеств, а $B$ — множество. Постройте биекцию между множеством всех отображений $\varinjlim_{i \in I} A_i \longrightarrow B$ и множеством всех наборов отображений $f_i \colon A_i \longrightarrow B$, заданных для всех $i \in I$ и удовлетворяющих соотношениям $f_j \circ \phi_{j,i} = f_i$ для всех $i \leqslant j \in I$.

в) Пусть $(A_i)$ — направленная диаграмма абелевых групп, а $B$ — абелева группа. Постройте биекцию между множеством всех гомоморфизмов абелевых групп $\varinjlim_{i \in I} A_i \longrightarrow B$ и множеством всех наборов гомоморфизмов $f_i \colon A_i \longrightarrow B$, заданных для всех $i \in I$ и удовлетворяющих соотношениям из пункта б).

Всюду ниже в этом листке под “предпучками” и “пучками” подразумеваются предпучки и пучки абелевых групп.

**Задача 1.** Пусть $f \colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для любого предпучка $\mathcal{F}$ на $X$ определим предпучок $f_*\mathcal{F}$ на $Y$ правилом $(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$. Покажите, что если $\mathcal{F}$ — пучок на X, то $f_*\mathcal{F}$ — пучок на $Y$. Пучок $f_*\mathcal{F}$ называется *прямым образом* пучка $\mathcal{F}$ при отображении $f$.

**Задача 2.** Пусть $f \colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для любого предпучка $\mathcal{G}$ на $Y$ определим предпучок $f^?\mathcal{G}$ на $X$ правилом $(f^?\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V)$ (где прямой предел берется по уменьшающимся открытым подмножествам $V \subset Y$, содержащим образ $U$).

а) Убедитесь, что сформулированное правило определяет предпучок на $X$.

б) Приведите контрпример, показывающий, что предпучок $f^?\mathcal{G}$ может не быть пучком, даже когда $\mathcal{G}$ — пучок.

*Обратным образом* $f^*\mathcal{G}$ пучка $\mathcal{G}$ при отображении $f$ называется пучок, ассоциированный с предпучком $f^?\mathcal{G}$.

в) Опишите накрытие, связанное с пучком $f^*\mathcal{G}$ (в терминах накрытия, связанного с пучком $\mathcal{G}$).

**Задача 3.** Пусть $f\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для любых пучков $\mathcal{F}$ на $X$ и $\mathcal{G}$ на $Y$ постройте изоморфизм между группой всех гомоморфизмов пучков $\mathcal{G} \longrightarrow f_*\mathcal{F}$ на $Y$ и группой всех гомоморфизмов пучков $f^*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ на $X$. В такой ситуации говорят, что функтор $f^*$ *сопряжен слева* к функтору $f_*$, а функтор $f_*$ *сопряжен справа* к функтору $f^*$.

Указание: постройте сначала

1) для любых двух предпучков $\mathcal{P}$ на $X$ и $\mathcal{Q}$ на $Y$ изоморфизм между группой всех гомоморфизмов предпучков $\mathcal{Q} \longrightarrow f_*\mathcal{P}$ на $Y$ и группой всех гомоморфизмов предпучков $f^?\mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{P}$ на $X$;

2) для любого предпучка $\mathcal{P}$ и пучка $\mathcal{F}$ на $X$ изоморфизм между группой всех гомоморфизмов предпучков $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}$ и группой всех гомоморфизмов пучков $\mathcal{P}^+ \longrightarrow \mathcal{F}$, где $\mathcal{P}^+$ обозначает пучок, ассоциированный с предпучком $\mathcal{P}$.

**Задача 4.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, снабженное индуцированной топологией, $j\colon U \longrightarrow X$ — отображение естественного вложения, и $\mathcal{G}$ — предпучок на $U$. Определим предпучок $j_?\mathcal{G}$ на $X$ правилами $(j_?\mathcal{G})(V) = \mathcal{G}(V)$ если $V \subset U$, и $(j_?\mathcal{G})(V) = 0$ в противном случае.

а) Убедитесь, что сформулированные правила определяют предпучок на $X$.

б) Приведите контрпример, показывающий, что предпучок $j_?\mathcal{G}$ может не быть пучком, даже когда $\mathcal{G}$ — пучок.

*Продолжением нулем* $j_!\mathcal{G}$ пучка $\mathcal{G}$ при открытом вложении $j\colon U \longrightarrow X$ называется пучок, ассоциированный с предпучком $j_?\mathcal{G}$.

в) Опишите накрытие, связанное с пучком $j_!\mathcal{G}$ (в терминах накрытия, связанного с пучком $\mathcal{G}$).

г) Для любых пучков $\mathcal{F}$ на $X$ и $\mathcal{G}$ на $U$ постройте изоморфизм между группой всех гомоморфизмов пучков $\mathcal{G} \longrightarrow j^*\mathcal{F}$ на $U$ и группой всех гомоморфизмов пучков $j_!\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ на $X$. (Другими словами, функтор $j_!$ сопряжен слева к функтору обратного образа $j^*$.)

**Задача 5.** Пусть $X$ — топологическое пространство, $Z \subset X$ — его замкнутое подмножество, снабженное индуцированной топологией, $i\colon Z \longrightarrow X$ — отображение естественного вложения, и $\mathcal{F}$ — пучок на $X$. Определим предпучок $i^!\mathcal{F}$ на $Z$ следующим образом. Для любого открытого подмножества $V \subset Z$, выберем какое-нибудь открытое подмножество $U \subset X$, такое что $V = U \cap Z$. Группа $(i^!\mathcal{F})(V)$ определяется как подгруппа в $\mathcal{F}(U)$, состоящая из всех сечений $s \in \mathcal{F}(U)$, слои которых $s_x \in \mathcal{F}_x$ зануляются во всех точках $x \in U \setminus V$.

а) Покажите, что сформулированное правило в самом деле определяет предпучок на $Z$ (в частности, что группа $(i^!\mathcal{F})(V)$ корректно определена, т.е. не зависит от выбора открытого подмножества $U$).

б) Покажите, что предпучок $i^!\mathcal{F}$ является пучком. Пучок $i^!\mathcal{F}$ называется *ограничением с носителем* пучка $\mathcal{F}$ на замкнутое подмножество $Z \subset X$.

в) Для любого пучка $\mathcal{G}$ на $Z$ постройте изоморфизм между группой всех гомоморфизмов пучков $G \longrightarrow i^!\mathcal{F}$ на $Z$ и группой всех гомоморфизмов пучков $i_*\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ на $X$. (Другими словами, функтор $i^!$ сопряжен справа к функтору прямого образа $i_*$.)