Листок 1. Базисные результаты комплексного анализа

С/к "Многомерный комплексный анализ", **15.09.2013**

Алгебраические свойства комплексных чисел. Кватернионы.

Алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ определяется как ассоциативная алгбра над $\mathbb{R}$ порожденная "мнимыми единицами" $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, удовлетворяющими соотношениям $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1$ и $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}$.

1◇1 **а)** Докажите что алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ имеет вещественную размерность 4 и обладает базисом $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, где $\mathbf{k} := \mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$. Составьте "таблицу умножения" в этом базисе и найдите все некоммутативные произведения в этой таблице. Найдите центр алгебры $\mathbb{H}$.
б) Вложим $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ как подалгебру порожденную $\mathbf{i}$. Покажите, что левое и правое умножение на комплексные числа задаёт в $\mathbb{H}$ две *различные* структуры комплексного векторного пространства в $\mathbb{H}$. Какова размерность $\mathbb{H}$ по отношенич к этим структурам?
в) В качестве основной структуры комплексного векторного пространства в $\mathbb{H}$ мы будем использовать умножения слева. Покажите, что умножение справа на любой кватернион $q \in \mathbb{H}$ есть $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathbb{H}$ в себя, а умножение слева на $\mathbf{j}$ или $\mathbf{k}$ — антилинейное отображение.

Операция *сопряжения* $\sigma : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ задаётся в вышеуказанном базисе соотношениями $\sigma(\mathbf{1}) = +\mathbf{1}$, $\sigma(\mathbf{i}) = -\mathbf{i}$, $\sigma(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}$, $\sigma(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}$. Сопряжение также обозначается $q \mapsto \bar{q}$.

г) Покажите следующие свойства кватернионов:

(1) $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$;
(2) $q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = \|q\|^2$, где $\|q\|$ — евклидова длина вектора $q \in \mathbb{H}$;
(3) $\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|$;

и найдите формулу для нахождения мультипликативно обратного кватерниона q^{-1}.
д) !! Какие трудности возникают при построении кватернионных полиномов?

Основные свойства аналитических функций.

1◇2 Докажите что сумма и произведение двух аналитических функций $f(z), g(z)$ в области U (вещественных или комплексных) есть снова аналитическая функция. Тоже верно и для мультипликативно обратной функции $\frac{1}{f(z)}$ при условии, что $f(z)$ не зануляется в U.

1◇3 Пусть $f(z)$ — голоморфная функция в области $U \subset \mathbb{C}$.
а) Используя (подходящую) формулу Коши, докажите теорему о среднем: *Значение функции в точке $z_0 \in U$ равно среднему значению функции по любому диску $\Delta(z_0, r)$, лежащему в U, и среднему значению функции по границе любого такого диска.*
б) Выведите из предыдущего пункта теорему о максимуме: *Если модуль функции $f(z)$ принимает максимальное значение в какой-то точке $z_0 \in U$, то функция $f(z)$ постоянна.*
в) Выведите из предыдущего пункта основную теорему алгебры: *Любой комплексный полином $P(z)$ имеет комплексный корень $z_0 \in \mathbb{C}$.* (Указание: Предположив обратное, рассмотрите поведение голоморфной функции $P(z)^{-1}$ при $|z| \gg 1$).

1◇4 (Логарифмическая выпуклость областей сходимости.) Пусть $\sum_I a_I z^I$ — комплексный ряд (где $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и $I = (i_1, \ldots i_n)$), а $r' = (r'_1, \ldots, r'_n)$, $r'' = (r''_1, \ldots, r''_n)$ — два невырожденных полирадиуса (т.е. $r'_j, r''_j > 0$), такие что ряд $\sum_I a_I z^I$ равномерно сходится в полидисках $\Delta^n(0, r')$ и $\Delta^n(0, r'')$. Докажите, что для каждого $t \in [0,1]$ ряд $\sum_I a_I z^I$ равномерно сходится в полидиске $\Delta^n(0, r^*)$ при условии $0 < r^*_j$ и

$$\mathsf{log}(r^*_j) < t \cdot \mathsf{log}(r'_j) + (1-t) \cdot \mathsf{log}(r''_j).$$

(Анти)линейность.

1◇5 **а)** Пусть U, V, W — комплексные векторные пространства, $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ — $\mathbb{R}$-линейные отображения, $\theta := \psi \circ \varphi : U \to W$ — их композиция. Выразите комплексно (анти)линейную часть θ через соответствующие части φ и ψ.
б) Выведите "цепное правило" т.е. формулу для (анти)комплексных производных

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(f \circ g) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f \circ g)$$

композиции $f \circ g$ двух C^1-гладких отображений между областями в комплексных векторных пространствах.

1◇6 Пусть $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — комплексно-линейное отображение, а $F_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ — оно же рассмотренное, как вещественное. Выразите вещественный детерминант $\mathsf{det}(F_{\mathbb{R}})$ через комплексный $\mathsf{det}(F)$.

1◇7 **а)** Пусть V, W — комплексные векторные пространства, а $\varphi : V \times V \to W$ — (анти)симметрическое $\mathbb{R}$-билинейное отображение. Докажите, что φ разлагается единственным образом в сумму $\varphi = \varphi^{(2,0)} + \varphi^{(1,1)} + \varphi^{(0,2)}$ (анти)симметрических $\mathbb{R}$-билинейных отображений, таких что $\varphi^{(2,0)}$ — $\mathbb{C}$-билинейно, $\varphi^{(0,2)}$ — $\mathbb{C}$-антибилинейно, а $\varphi^{(1,1)}$ удовлетворяет условию

$$\varphi^{(1,1)}(\mathbf{i}v, \mathbf{i}w) = \varphi^{(1,1)}(v, w).$$

Вычислите размерность векторных пространств билинейных отображений соответствующих типов.
б) Укажите естественный изоморфизм между пространствами Эрмитовых и анти-Эрмитовых матриц размера $(n \times n)$. (Спросите у физиков!)