

Домашнее задание 2

1.1. Выведите из формулы Пьери вторую формулу Якоби–Труди,

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda_i^* + j - i}).$$

(УКАЗАНИЕ: раскройте определитель по последнему столбцу и воспользуйтесь предположением индукции. Следствие: в сочетании с первой формулой Якоби–Труди это показывает, что $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^*}$.)

1.2. Докажите, что а) $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} e_{\lambda}(x) m_{\lambda}(y)$; б) $\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} s_{\lambda^*}(x) s_{\lambda}(y)$.

Многочлены Ньютона определяются как $p_k(x_1, \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n^k$; как обычно, положим еще $p_{\lambda} = p_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot p_{\lambda_k}$.

1.3. а) Докажите, что

$$H(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_{\lambda}} p_{\lambda} t^{|\lambda|},$$

где z_{λ} — некоторые числа. (УКАЗАНИЕ: $(1 - w)^{-1} = \exp(w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \dots)$.)

б) Докажите, что p_{λ} — ортогональный базис и вычислите $\langle p_{\lambda}, p_{\lambda} \rangle$.

Решения этого задания нужно сдать в письменном виде до 17:00 (т.е. до начала лекции) 2 октября 2013 г.