Листок 2.

С/к “Многомерный комплексный анализ”, **24.09.2013**

Аналитические функции. Оболочки голоморфности.

Определение: Область U в $\mathbb{C}^n$ *голоморфно выпукла* если для любой строго большей области $U^+ \supset U$ существует голоморфная в U функция $f(z)$ которая не продолжается голоморфно в U^+. *Оболочка голоморфности* области U в $\mathbb{C}^n$ называется такая голоморфно выпуклая область $\widehat{U}$ в $\mathbb{C}^n$, что любая

2⋄1 Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$ и $f(x), g(x)$ — две вещественно-аналитические функции в U. Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некотором непустом открытом множестве $V \subset U$. Докажите, что $f(x)$ и $g(x)$ совпадают всюду в U.

2⋄2 Пуст $r' = (r'_1, r'_2)$ и $r'' = (r''_1, r''_2)$ — два бирадиуса, такие что $0 < r''_1 < r'_1$ и $0 < r'_2 < r''_2$. Найдите оболочку голоморфности области $U := \Delta^2(r') \cup \Delta^2(r'')$.
(Подсказка: Используйте результат задания **1⋄4**. Докажите что для $z^* = (z^*_1, z^*_2)$ такого что $r''_1 < |z^*_1| < r'_1$, $r'_2 < |z^*_2| < r''_2$, и такого что либо

$$\mathsf{log}(|z^*_1|) > t \cdot \mathsf{log}(r'_1) + (1-t) \cdot \mathsf{log}(r''_1)$$

либо

$$\mathsf{log}(|z^*_2|) > t \cdot \mathsf{log}(r'_2) + (1-t) \cdot \mathsf{log}(r''_2)$$

для некоторого $0 < t < 1$ существует ряд, который абсолютно сходится в $U = \Delta^2(r') \cup \Delta^2(r'')$ но расходится в z^*. Сделайте картинку в плоскости координатами $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$.)

2⋄3 Докажите, что *выпуклая* область U в $\mathbb{C}^n$ голоморфно выпукла.
(Подсказка из выпуклого анализа: для каждой точки p лежащей на границе выпуклой области U существует $\mathbb{R}$-линейное отображение $\varphi(z)$ из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{R}$ и константа $a \in \mathbb{R}$ такие что $\varphi(p) = a$ и $\varphi(z) < a$ для любой точки z из U. Используя такую $\varphi(z)$, постройте подходящую $\mathbb{C}$-линейную функцию $\psi(z)$ и рассмотрите поведение $\frac{1}{\psi(z)}$ в окресности точки p.)

2⋄4 Докажите, что любая область U в $\mathbb{C}$ голоморфно выпукла. (Указание: Постройте ряд $\sum_j \frac{a_j}{z-b_j}$ который абсолютно сходится на компактах в U и такой что множество $\{b_j\}$ плотно в дополнении $\mathbb{C} \backslash U$.

Пусть $h = h(z)$ — C^2-гладкая вещественная функция в области U в $\mathbb{C}^n$. *Комплексный гессиан* h в точке $p \in U$ (по отношению к координатам (z_j) в $\mathbb{C}^n$) — это матрица вторых производных

$$\mathsf{Hess}_p(h) := \left(\frac{\partial^2 h}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p)\right)_{j,k=1}^n$$

2◇5 Пусть $h = h(z)$ — C^2-гладкая вещественная функция в области U в $\mathbb{C}^n$.

а) Пусть $w = (w_1, \ldots, w_n)$ другая локальная комплексная система координат в окресности точки $p \in U$. Найдите выражение комплексного гессиана h в точке $p \in U$ по отношению к новым координатам (w_j) через "старый" гессиан. Докажите, что сигнатура гессиана (т.е. кол-во положительных и отрицательных собственных значений матрицы $\mathsf{Hess}_p(h)$) не зависит от выбора локальных комплексных координат.

б) Что такое гессиан в случае одной комплексной переменной?

в) Вычислите гессиан функции $h(z) := \sum_j |z_j|^2$ на единичной сфере $S^{2n-1} := \{h = 1\}$ в $\mathbb{C}^n$.

г) Предположим что функция $h(z)$ невырождена в точке $p \in U$ (т.е. $dh_p \neq 0$) и имеет строго положительно определённый гессиан в $p \in U$. Докажите, что не существует непостоянного голоморфного отображения $f : \Delta \to U$ такого что $f(0) = p$ и что образ $f(\Delta)$ лежит на множестве уровней $\{z \in U : h(z) = a\}$ где $a := h(p)$. (Подсказка: Используйте принцип максимума задания **1◇3**.)

2◇6 Докажите, что любое замкнутое множество Z в $\mathbb{R}^n$ есть множество нулей гладкой функции.

2◇7 Постойте идеал I в алгебре $A := C^\infty(\mathbb{R})$ который не является конечно порожденным, и такой что для любого $p \neq 0 \in \mathbb{R}$ существует функция $f(x) \in I$, такая что $f(p) \neq 0$.