

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ЛИСТОК 2 (до 09.10.13)

(оценка пропорциональна числу сданных пунктов задач)

1. Существует ли

- а) диффеоморфизм между внутренностью круга и внутренностью квадрата?
- б) диффеоморфизм $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, переводящий окружность в границу квадрата?
- в) гладкое отображение $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, вырожденное ровно в одной точке?

2. а) Придумайте гладкую дифференциальную 1-форму ω на \mathbb{R}^2 , такую что уравнение в дифференциалах $\omega = 0$ не имеет интегральной гиперповерхности (т. е. кривой), проходящей через начало координат.

б) Придумайте гладкую дифференциальную 1-форму ω на \mathbb{R}^3 , такую что $\omega(0) \neq 0$, и уравнение в дифференциалах $\omega = 0$ не имеет интегральной гиперповерхности, проходящей через начало координат.

в) Придумайте непрерывную дифференциальную 1-форму, у которой две интегральные гиперповерхности касаются в одной точке.

3. Один математик придумал операцию умножения дифференциальных 1-форм: произведением форм $udx + vdy$ и $pdx + qdy$ на плоскости \mathbb{R}^2 называется форма $updx + vqdy$. Какие диффеоморфизмы (гладкие замены координат) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сохраняют эту операцию?

4. Какие из следующих форм могут быть переведены друг в друга диффеоморфизмом (гладкой заменой координат) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$?

$$dx+dy, \quad xdx+x dy, \quad x^2dx+y^2dy, \quad (1+x^2)dx+(1+y^2)dy, \quad (1+x^2)dx+(1+x^2)dy$$

5. а) Нарисуйте и задайте формулой гладкую периодическую траекторию $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, у которой вектор скорости ни в какой момент времени не сонаправлен с $(0, 1)$.

б) Для любой ли гладкой траектории $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ найдется точка $t \in [0, 1]$, в которой вектор скорости $\varphi'(t)$ параллелен вектору $\varphi(1) - \varphi(0)$? Тот же вопрос для $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$.

6. Придумайте полиномиальное векторное поле на плоскости а) с ограниченной незамкнутой фазовой кривой, б) с конечным ненулевым числом неограниченных фазовых кривых, в) с неограниченной траекторией $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, такой что $\lim_{t \rightarrow +\infty} |C(t)| \neq \infty$ и $\lim_{t \rightarrow -\infty} |C(t)| \neq \infty$.